

الامتحان التجريبي في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار موضوعا واحدا

الموضوع الأول

تنبيه: الكتابة تكون باللونين الأسود والازرق فقط وبخط واضح

التمرين الأول: (04 نقاط)

- نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس (O, \vec{u}, \vec{v}) النقطتين A و B لاحتقهما $\vec{z}_A = 4 + 2i$ ، $\vec{z}_B = 3 - i$
- (1) عين الطويلة والعمدة للعدد المركب $\frac{\vec{z}_B - \vec{z}_A}{\vec{z}_B - \vec{z}_O}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABO .
 - (2) عين مركز ونصف قطر الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABO . ارسم (C) والمثلث ABO
 - (3) نعتبر التحويل النقطي R في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M لاحتقتها \vec{z} النقطة M' لاحتقتها \vec{z}' والذي يحول النقطة A إلى B ويحول النقطة B إلى O .
 - (4) عين العبارة المركبة للتحويل النقطي R ثم استنتج طبيعته وعناصره المميزة.
 - (5) عين \vec{z}_C لاحتقة النقطة C صورة النقطة O بالتحويل R . استنتج طبيعة الرباعي $ABOC$.
 - (6) عين مجموعة النقط M من المستوي لاحتقتها \vec{z} حيث: $|\vec{z} - 4 - 2i| = |\vec{z}|$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- ليكن (P_1) المستوي الذي معادلته: $-2x + y + z - 6 = 0$ ، والمستوي (P_2) الذي معادلته: $x - 2y + 4z - 9 = 0$.
- (1) أثبت أن (P_1) و (P_2) متعامدان.
 - (2) ليكن (D) المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيط: $\begin{cases} x = 2t - 7 \\ y = 3t - 8 \\ z = t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.
 - (3) أثبت أن المستقيم (D) هو تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) .
 - (4) اكتب المعادلة الديكارتيّة للمستقيم (D) .
 - (5) لتكن A النقطة التي إحداثياتها $(-9, -4, -1)$.
 - (6) اوجد احداثيات النقطة I المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D) .
 - (7) عين معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل A والعمودي على المستقيم (D) .
 - (8) حل في \mathbb{R} جملة المعادلات التالية: $\begin{cases} -2x + y + z - 6 = 0 \\ x - 2y + 4z - 9 = 0 \\ 2x + 3y + z + 31 = 0 \end{cases}$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$ من اجل كل عدد طبيعي n ،
 (1) أ. برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n فان: $u_n \leq n + 3$

ب. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ج. استنتج ان المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل؟ هل هي متقاربة؟

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ: $v_n = u_n - n$

أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الاول.

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ت) أحسب المجموع: $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

(3) نعتبر المتتالية (t_n) المعرفة بـ: $t_n = \ln(v_n)$

أ) برهن أن المتتالية (t_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الاول.

ب) أحسب المجموع: $s'_n = t_0 + t_1 + \dots + t_n$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $[1, +\infty[$ حيث: $g(x) = x^2 - 2x - 4 \ln(x-1)$ (حيث: \ln اللوغاريتم النيبيري)
 (Γ) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل المقابل .

(1) بقراءة بيانية للمنحنى (Γ) ، عيّن عدد حلول المعادلة: $g(x) = 0$.

(2) أحسب $g(2)$ ، ثم بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $2,87 < \alpha < 2,88$.

(3) إستنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $[1, +\infty[$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $[1, +\infty[$ حيث: $f(x) = x - 3 + \frac{4 \ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ، وفسر النتيجة بيانياً ، ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) أ) بيّن أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x - 3$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

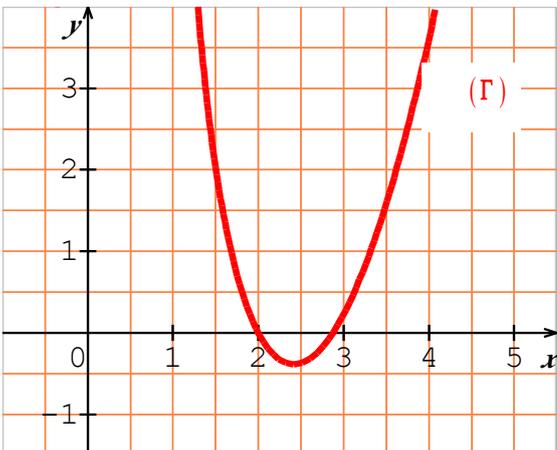
ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(3) أ) بيّن أنه من أجل كل x من $[1, +\infty[$ لدينا: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$.

ب) إستنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

(4) أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) (نأخذ: $f(\alpha) = 3,9$)

(5) أحسب بدلالة α التكامل: $\int_2^5 f(x) dx$ ، ثم فسر النتيجة بيانياً .



الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

$$\cdot \begin{cases} u_0 = 12 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \end{cases} \text{ لتكن } (u_n) \text{ المتتالية المعرفة على } N \text{ كما يلي:}$$

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(1) أ- أنشئ (C) منحنى الدالة f المعرفة على R بـ: $f(x) = \frac{1}{4}x + 3$ والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$.

ب- مثل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود $u_0; u_1; u_2; u_3$.

ج- ما هو تخمينك حول تقارب واتجاه تغير المتتالية (u_n) ؟

(2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 4 < u_n \leq 12$.

ب- بين أن (u_n) متناقصة.

ج- هل (u_n) متقاربة؟ برر إجابتك.

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n : v_n = u_n - 4$.

أ- اثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- اكتب عبارة u_n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

نعتبر المجموعة (S) للنقط $M(x, y, z)$ حيث: $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 5 = 0$.

(1) بين أن (S) سطح كرة يُطلب تعيين مركزها وطول نصف قطرها.

(2) نعتبر المستوي (Q) المعرف بالمعادلة: $2x - 2y + z - 2 = 0$.

بين أن المستوي (Q) يقطع سطح الكرة (S) في دائرة يُطلب تحديد مركزها ونصف قطرها.

(3) نعتبر المستوي (P_m) المعرف بالمعادلة: $2mx + (1-2m)y + mz + 1 - 2m = 0$ حيث m عدد حقيقي.

(أ) ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(0, -1, 0)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(1, 0, -2)$.

بين المستقيم (Δ) محتوي في المستوي (P_m) .

(ب) حدّد قيمة m التي من أجلها يكون المستوي (P_m) مماساً للسطح كرة (S) .

(ج) حدّد قيمة m التي من أجلها يكون المستوي (P_m) عمودي على المستوي (Q) .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس مباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) .

تعطى النقط A, B, C, D التي لواحقتها $\mathcal{Z}_A = -2, \mathcal{Z}_B = 2, \mathcal{Z}_C = -1 + i, \mathcal{Z}_D = 1 - 3i$.

(1) أثبت أن D هي مرجح الجملة المثقلة $A, 5; B, 3; C, -6$.

- (2) عيّن مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة \bar{z} حيث: $|\bar{z} + 2| = |\bar{z} + 1 - i|$.
- (3) أكتب العدد المركب $\frac{\bar{z}_D - \bar{z}_B}{\bar{z}_C - \bar{z}_B}$ على الشكل الآسي، ثم إستنتج طبيعة المثلث BCD .
- (4) أ) أكتب العدد المركب $\frac{\bar{z}_D - \bar{z}_A}{\bar{z}_C - \bar{z}_A}$ على الشكل الآسي.
ب) إستنتج أن D هي صورة C بتحويل نقطي f يُطلب تعيين طبيعته وعناصره المميزة.
ج) إستنتج $|\bar{z}_A - \bar{z}_{B'}|$ حيث B' هي صورة B بالتحويل f ، ثم أحسب عندئذ مساحة المثلث ABB' .
- (5) لتكن النقطة Ω ذات اللاحقة $\bar{z}_\Omega = \frac{-1}{2}$. عيّن العبارة المركبة للتحاكي h الذي مركزه Ω ويحول D إلى C .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. الوحدة 2cm

(1) الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = -1 - xe^x$

ادرس تغيرات الدالة g ، شكل جدول تغيراتها، واستنتج إشارتها على \mathbb{R} .

(2) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = -x + (1-x)e^x$ و (C) تمثيلها البياني.

• ادرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ- حدد المستقيم المقارب للمنحنى (C) .

ب- عين معادلة ديكرتية للمستقيم (Δ) المماس للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

ج- أثبت أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف عين إحداثيها.

د- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 في \mathbb{R} ، حيث $x_0 \in \left] \frac{1}{2}; \frac{2}{3} \right[$.

(4) ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C) .

(5) α عدد حقيقي سالب تماما.

* احسب بـ cm^2 المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) والمستقيمتين التي معادلاتها:

$$y = -x, \quad x = 0 \quad \text{و} \quad x = \alpha$$

* احسب $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} A(\alpha)$

(6) نعتبر الدالة g_λ ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g_\lambda(x) = -\lambda - xe^x$

حيث λ وسيط حقيقي.

أ- ادرس تغيرات الدالة g_λ .

ب- باستعمال جدول التغيرات، ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي λ وجود وعدد حلول المعادلة $g_\lambda(x) = 0$.

ت- استنتج إشارة $g_\lambda(x)$ على \mathbb{R} . حسب قيم الوسيط الحقيقي λ .