ثانوية محفوظ سعد　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　المستوى : 3ع ت

الفرض الاول في للثلاثي الاول في مادة الرياضيات

g دالة معرفة على R بـ $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1/ ادرس تغيرات الدالة g

2/ بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2 \leq \alpha \leq 2.25$

3/ استنتج اشارة $g(x)$

f دالة معرفة على $R - \{-1, 1\}$ بـ $f(x) = \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1}$

1/ احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف

2/ برهن انه من اجل كل عدد حقيقي x من $R - \{-1, 1\}$ لدينا : $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$

3/ ادرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

4/ برهن ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب مائل لـ C_f بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

5/ ادرس الوضع النسبي بين C_f و (Δ).

6/ بين ان : $f(\alpha) = 1 + \frac{3\alpha+6}{\alpha^2-1}$ ثم استنتج حصرا لـ: $f(\alpha)$

7/بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α' حيث $-1.5 \leq \alpha' \leq -1.25$

8/ ارسم C_f و (Δ)

k دالة معرفة على $R - \{\alpha'\}$ بـ: $k(x) = \frac{1}{f(x)}$

9/ادرس تغيرات الدالة k ثم ارسم منحناها

h دالة معرفة على $R - \{0, -2\}$ بـ : $h(x) = f((x+1)^2)$

10/ ادرس تغيرات الدالة الدالة h وشكل جدول تغيراتها .

11/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m حلول المعادلة $f(x) = |m - 1|$.

12/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m حلول المعادلة $f(cos(\theta)) = \frac{1}{m}$ حيث : $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

13/ / ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط θ حلول المعادلة $f(x) = sin(\theta)$.

بالتوفيق استاذ المادة

التصحيح النموذجي للفرض الاول 3ع ت 1 من اعداد الاستاذ زرقي وليد

g دالة معرفة على R بـ $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1/ دارسة تغيرات الدالة g

- النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

- الدلة المشتقة : g دالة قابلة للاشتقاق على R: $g'(x) = 3x^2 - 3$
- إشارة الدالة المشتقة :

$3x^2 - 3 = 0$

نجد : $x = 1$ او $x = -1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘	-8	↗	$+\infty$

2/ اثبات ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث 2≤α≤2.25

- من جدول التغيرات مستمرة ورتيبة على المجال$[2 ; 2.25]$
- لدينا : $g(2) = -2$ و $g(2.25) = 0.64$ ومنه فان : $g(2).g(2.25) \le 0$

ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة فان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث 2≤α≤2.25

3/ استنتاج اشارة $g(x)$

من جدول التغيرات لدينا :

$x\in]-\infty; \alpha[$ لدينا : $g(x) \le 0$

$x = \alpha$ لدينا : $g(x) = 0$

$x\in]\alpha; +\infty[$ لدينا : $g(x) \ge 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

f دالة معرفة على $R - \{-1, 1\}$ بـ $f(x) = \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1}$

1/ حساب النهايات :

$$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$$

$$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$$

$$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty \qquad \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty \qquad \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty$$

$x = -1$ مستقيم مقارب عمودي لـ C_f بجوار $-\infty$ و $+\infty$

$x = 1$ مستقيم مقارب عمودي لـ C_f بجوار $-\infty$ و $+\infty$

2/ الدالة المشتقة

f دالة قابلة للاشتقاق على $R - \{-1, 1\}$:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 2x)(x^2 - 1) - 2x(x^3 + x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{3x^4 - 3x^2 + 2x^3 - 2x^2 - (2x^4 - 2x^3 - 2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2 - 6x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{x(x^3 - 3x - 4)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$$

3/ دارسة تغيرات الدالة f

- **إشارة الدالة المشتقة :**

لدينا :

$(x^2 - 1)^2 > 0$

ومنه إشارة f' من اشارة $xg(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
x		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	‖	$-$		$-$	‖	$-$		$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$+$		$-$	‖	$-$		$+$	

- **جدول التغيرات:**

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$		$-$	‖	$-$		$+$	
$f(x)$			$+\infty$ ‖		-1		‖ $+\infty$				$+\infty$
		↗	‖	↗		↘	‖	↘		↗	
	$-\infty$		‖ $-\infty$				$-\infty$ ‖		$f(\alpha)$		

$x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0] \cup [\alpha; +\infty[$

f متزايدة

$x \in [0; 1[\cup]1; \alpha]$

f متناقصة

4/ اثبات ان المستقيم (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ C_f بجوار $-\infty$ و $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x^2+1}{x^2-1}-(x+1)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x^2+1-(x+1)(x^2-1)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

ومنه المستقيم (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ C_f بجوار $-\infty$ و $+\infty$

5/ دراسة الوضع النسبي بين C_f و (Δ)

دراسة اشارة المقدار $f(x)-y$

$$f(x)-y=\frac{x^3+x^2+1}{x^2-1}-(x+1)=\frac{x^3+x^2+1-(x+1)(x^2-1)}{x^2-1}=\frac{x-2}{x^2-1}$$

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	‖	$+$	‖	$+$	
x^2-1		$+$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	
الوضع النسبي		C_f تحت (Δ)	C_f يقطع (Δ)	C_f فوق (Δ)		C_f تحت (Δ)		C_f فوق (Δ)	

$x+2=0$

$x=-2$

$x^2-1=0 \qquad x^2=1$

$x=1$ او $x=-1$

6/ اثبات ان $f(\alpha)=1+\frac{3\alpha+6}{\alpha^2-1}$

$$g(\alpha)=0$$

$$\alpha^3-3\alpha-4=0$$

$$\alpha^3=3\alpha+4$$

$$f(\alpha)=\frac{\alpha^3+\alpha^2+1}{\alpha^2-1}$$

$$=\frac{3\alpha+4+\alpha^2+1}{\alpha^2-1}=\frac{\alpha^2+3\alpha+5}{\alpha^2-1}=\frac{\alpha^2-1+1+3\alpha+5}{\alpha^2-1}$$

$$=\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2-1}+\frac{3\alpha+6}{\alpha^2-1}=1+\frac{3\alpha+6}{\alpha^2-1}$$

استنتاج حصر لـ : $f(\alpha)$

لدينا : $2 \leq \alpha \leq 2.25$

باضرب في 3 و اضافة 6 الى جميع الاطراف نجد : $\boxed{12 \leq 3\alpha + 6 \leq 12.75}$ ...... (1)

لدينا : $2 \leq \alpha \leq 2.25$

بتربيع اطراف المتراجحة ثم اضافة -1 الى جميع الاطراف نجد : $3 \leq \alpha^2 - 1 \leq 4.06$

بقلب اطراف المتراجحة نجد $\boxed{\frac{1}{4.06} \leq \frac{1}{\alpha^2 - 1} \leq \frac{1}{3}}$ ...... (2)

بضرب اطراف المتراجحة (1) في اطراف المتراجحة (2) نجد :

$$\frac{12}{4.06} \leq \frac{3\alpha + 6}{\alpha^2 - 1} \leq \frac{12.75}{3}$$

نضيف 1 الى جميع الاطراف نجد :

$$3.95 \leq \frac{3\alpha + 6}{\alpha^2 - 1} + 6 \leq 5.25$$

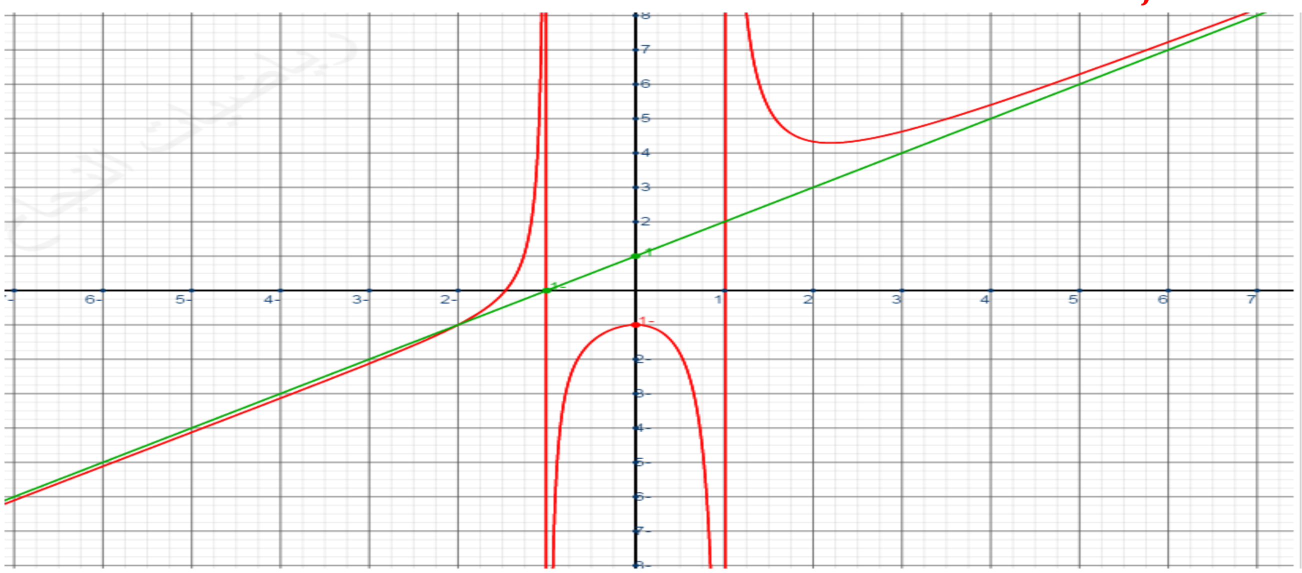
ومنه : $3.95 \leq f(\alpha) \leq 5.25$

7/ اثبات ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α' حيث -1.5≤α'≤-1.25

- من جدول التغيرات f مستمرة ورتيبة على المجال $[-1.5; -1.25]$
- لدينا : $f(-1.25) = \cdots$ و $f(-1.5) = \cdots$ ومنه فان : $f(-1.25).f(-1.5) \leq 0$

ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة فان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α' حيث -1.5≤α'≤-1.25

8/ رسم C_f و (Δ)



k دالة معرفة على $R-\{\alpha'\}$ بـ: $k(x)=\dfrac{1}{f(x)}$

9/ دراسة تغيرات الدالة k

- النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} k(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} k(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0$$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}\alpha'} k(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}\alpha'}\frac{1}{f(x)}=-\infty$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}\alpha'} k(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}\alpha'}\frac{1}{f(x)}=+\infty$$

- الدلة المشتقة : k دالة قابلة للاشتقاق على $R-\{\alpha'\}$:

$$k'(x)=\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$

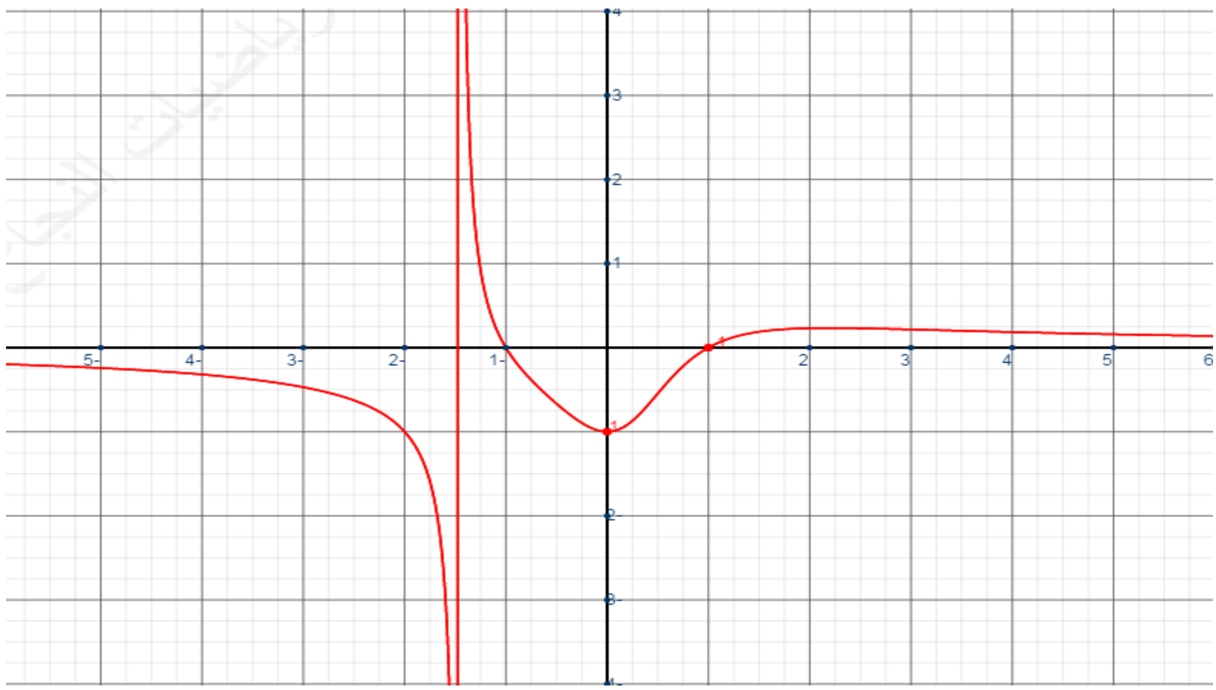
- جدول التغيرات :

$$(f(x))^2>0$$

ومنه اشارة k' من اشارة $-f'(x)$

x	$-\infty$		α'		0		α		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	
$k(x)$	0	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	-1	↗	$k(\alpha)$	↘	0

رسم C_k



h دالة معرفة على $R-\{-2\,,0\}$: بـ : $h(x)=f((x+1)^2)$

10/ دراسة تغيرات h

النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{h(x)} = \lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} f((x+1)^2) = \lim_{y\to+\infty} \mathrm{f(y)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{h(x)} = \lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} f((x+1)^2) = \lim_{y\to+\infty} \mathrm{f(y)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-2^-} \mathrm{h(x)} = \lim_{x\to-2^-} h(x) = \lim_{x\to-2^-} f((x+1)^2) = \lim_{y\to1^+} \mathrm{f(y)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+} \mathrm{h(x)} = \lim_{x\to-2^+} h(x) = \lim_{x\to-2^+} f((x+1)^2) = \lim_{y\to1^-} \mathrm{f(y)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} \mathrm{h(x)} = \lim_{x\to0^-} h(x) = \lim_{x\to0^-} f((x+1)^2) = \lim_{y\to1^-} \mathrm{f(y)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} \mathrm{h(x)} = \lim_{x\to0^+} h(x) = \lim_{x\to0^+} f((x+1)^2) = \lim_{y\to1^+} \mathrm{f(y)} = +\infty$$

الدالة المشتقة : h دالة قابلة للاشتقاق على $R-\{-2\,,0\}$

$$h'(x)=(2x+2)\,f'((x+1)^2)$$

اشارة الدالة المشتقة :

$2x+2=0$ يكافئ $x=-1$

$f'((x+1)^2)=0$ يكافئ : $(x+1)^2=0$ او $(x+1)^2=0$

يكافئ : $x=0$ او $x=-\sqrt{\alpha}-1$ او $x=\sqrt{\alpha}-1$

$f'((x+1)^2)\le 0$ يكافئ : $0\le(x+1)^2\le\alpha$ يكافئ : $-\sqrt{\alpha}-1\le x\le\sqrt{\alpha}-1$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\alpha}-1$		-2		-1		0		$-\sqrt{\alpha}-1$		$+\infty$
$2x+2$		-		-	‖	-		+	‖	+		+	
$f'(x+1)^2$		+	0	-	‖	-	0	-	‖	+	0	+	
$h'(x)$		-	0	+	‖	+	0	-	‖	-	0	+	
$h(x)$	$-\infty$	↘	$h(-\sqrt{\alpha}-1)$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$h(-\sqrt{\alpha}-1)$	↗	$+\infty$

11/ مناقشة حلول المعادلة $f(x) = |m-1|$

نضع $m-1=k$ تصبح المعادلة : $f(x) = |k|$

أي : $|k| \in [0; f(\alpha)[$ $k \in]-f(\alpha); f(\alpha)[$ المعادلة $f(x) = |m-1|$ تقبل حل وحيد

اي $|k| = f(\alpha)$ $k=-f(\alpha)$ او $k=f(\alpha)$ المعادلة $f(x) = |m-1|$ تقبل حلان

أي : $|k| \in]f(\alpha); +\infty[$ $k \in]-\infty; -f(\alpha)[\cup]f(\alpha); +\infty[$ المعادلة $f(x) = |m-1|$ تقبل 3 حلول

المناقشة حسب قيم m لدينا : $m = k+1$

$m \in]-f(\alpha)+1; f(\alpha)+1[$ المعادلة $f(x) = |m-1|$ تقبل حل وحيد

$m=-f(\alpha)+1$ او $m=f(\alpha)+1$ المعادلة $f(x) = |m-1|$ تقبل حلان

$m \in]-\infty; -f(\alpha)+1[\cup]f(\alpha)+1; +\infty[$ المعادلة $f(x) = |m-1|$ تقبل 3 حلول

12/ مناقشة حلول المعادلة $f(cos(\theta)) = \frac{1}{m}$

المعادلة $f(cos(\theta)) = \frac{1}{m}$ تكافئ المعادلة : $\frac{1}{f(cos(\theta))} = m$ تكافئ : $k(cos(\theta)) = m$

نناقش بيانيا مع منحنى الدالة k وناخذ فقط الحلول المحصورة بين -1 و1 لان $-1 \leq cos(\theta) \leq 1$

$m \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$ المعادلة $f(cos(\theta)) = \frac{1}{m}$ لا تقبل حلول

$m=-1$ المعادلة $f(cos(\theta)) = \frac{1}{m}$ تقبل حل وحيد اذا كان المجهول $cos(\theta)$ وتقبل حلان اذا كان المجهول θ

$m \in]-1; 0[$ المعادلة $f(cos(\theta)) = \frac{1}{m}$ تقبل حلان اذا كان المجهول $cos(\theta)$ وتقبل 4 حلول اذا كان المجهول θ

$m=0$ المعادلة $f(cos(P)) = \frac{1}{m}$ تقبل حلان

13/ مناقشة حلول المعادلة $f(x) = \sin(\theta)$

نضع $\sin(\theta) = t$ تصبح المعادلة $f(x) = t$

من اجل $\theta = \frac{3\pi}{2}$ فان $t=-1$ المعادلة $f(x) = \sin(\theta)$ تقبل حلان

$\theta \in [0; \frac{3\pi}{2}[\cup]\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$ فان : $-1 \leq t \leq 1$ المعادلة $f(x) = \sin(\theta)$ لا تقبل حلول