الفرض الأوّل للثّلاثي الأوّل في مادّة الرّياضيات

المستوى: ثالثة علوم تجريبيّة 01

الجزء الأوّل:

لتكن g دالّة عدديّة مُعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=10+21x-x^3$.

1) أدرُس تغيّرات الدّالّة g ثُمّ شكّل جدول تغيُّراتها.

2) أثبت أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل ثلاث حلول α، β و λ حيثُ $-4,4<\alpha<-4,3$، $-0,5<\beta<-0,4$ و $4,8<\lambda<4,9$.

3) استنتج إشارة $g(x)$ تبعاً لقيم العدد الحقيقي x.

الجزء الثّاني:

لتكن f دالّة عدديّة مُعرّفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ $f(x)=\dfrac{1-3x^2-4x^3}{x^3+x^2-2}$، و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس للمستوي.

1) أُحسُب نهايات الدّالّة f بجوار أطراف مجموعة تعريفها. فسِّر هندسيّاً النّتائج.

2) أ) أثبت أنّ الدّالّة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$ و أنّ $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^3+x^2-2)^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدّالّة f ثُمّ شكّل جدول تغيُّراتها.

3) أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً μ حيثُ $0,4<\mu<0,5$.

4) حل المعادلة، ذات المجهول الحقيقي x حيثُ $f(x)+4=0$. ماذا تستنتج؟

5) نقبل أنّ (C_f) يقبل $\Omega\left(-\dfrac{1}{4},-\dfrac{9}{20}\right)$ كنقطة إنعطاف، أرسم (C_f).

الأستاذ المادة: زرايدي علاء الدين

الإجابة النموذجية

الجزء الأوّل:

1) الدّالّة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالّتها المشتقّة $g'(x) = -3x^2 + 21$.

لدينا $g'(x) = 0$ يكافئ $-3x^2 + 21 = 0$ يكافئ $x = -\sqrt{7}$ أو $x = \sqrt{7}$، و إشارة $g'(x)$ مُوضحة في الجدول

x	$-\infty$		$-\sqrt{7}$		$\sqrt{7}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

الدّالّة g متزايدة تماماً على $\left]-\sqrt{7}, \sqrt{7}\right[$ و متناقصة تماماً على $\left]-\infty, -\sqrt{7}\right[\cup \left]\sqrt{7}, +\infty\right[$.

لدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$، و تغيُّرات الدّالّة g مُوضّحة في الجدول الآتي

x	$-\infty$		$-\sqrt{7}$		$\sqrt{7}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-27{,}04$	$\nearrow$	$47{,}04$	$\searrow$	$-\infty$

2) الدّالّة g مستمرّة و رتيبة تماماً على كلّ مجال من المجالات $\left]-4,4;-4,3\right[$، $\left]-0,5;-0,4\right[$ و $\left]4,8;4,9\right[$

و لدينا $g(-4,3)\times g(-4,4) < 0$، $g(-0,5)\times g(-0,4) < 0$ و كذلك $g(4,8)\times g(4,9) < 0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسّطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل ثلاث حلول α، β و λ حيث $-4,4 < \alpha < -4,3$، $-0,5 < \beta < -0,4$ و $4,8 < \lambda < 4,9$.

3) إشارة $g(x)$ مُوضحة في الجدول

x	$-\infty$		α		β		λ		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

الجزء الثاني:

1) لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -4$، و منه المستقيم ذو المعادلة $y = -4$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$ و $-\infty$ لـ (C_f).

كذلك $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = +\infty$، و منه المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب عمودي لـ (C_f).

2) أ) الدّالّتان $x \mapsto 1 - 3x^2 - 4x^3$ و $x \mapsto x^3 + x^2 - 2$ قابلتان للإشتقاق على $\mathbb{R} - \{1\}$، و منه الدّالّة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R} - \{1\}$، و دالّتها المشتقّة $f'(x) = \dfrac{10x + 21x^2 - x^4}{(x^3 + x^2 - 2)^2} = \dfrac{xg(x)}{(x^3 + x^2 - 2)^2}$.

ب) إشارة $f'(x)$ مُوضّحة في الجدول

x	$-\infty$		α		β		0		1		λ		$+\infty$
x		$-$		$-$		$-$		$+$		$+$		$+$	
$g(x)$		$+$		$-$		$+$	0	$+$		$+$		$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

و منه الدّالّة f متزايدة تماماً على $[\alpha,\beta]\cup[0,1[\cup]1,\lambda]$ و متناقصة تماماً على $]-\infty,\alpha]\cup[\beta,0]\cup[\lambda,+\infty[$،
وجدول تغيُّراتها هو

x	$-\infty$		α		β		0		1		λ		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$-$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-4	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$f(\lambda)$	$\searrow$	-4

3) الدّالّة f مستمرّة و رتيبة تماماً على $]0,4;0,5[$ و $f(0,4)\times f(0,5)<0$ ، و منه حسب مُبرهنة القيم المتوسّطة، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً μ حيثُ $0,4<\mu<0,5$.

4) لدينا $f(x)+4=0$ تكافئ $f(x)=-4$ يكافئ $x=-\sqrt{7}$ أو $x=\sqrt{7}$، أي أنّ (C_f) يقطع المستقيم المقارب الأفقي الذي معادلته $y=-4$ في نقطتين فاصلتاهما $x=-\sqrt{7}$، $x=\sqrt{7}$.