اختبار في مادة الرياضيات
المـدة: ساعتان و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين01:

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية حدودها موجبة حيث: $U_0=1$ و $\ln U_1+\ln U_2=-3\pi$

أ)عين أساس هذه المتتالية ، وأحسب U_n بدلالة n .

ب) نسمي P_{n+1} المجموع : $U_0+U_1+......+U_n$.أحسب P_{n+1} بدلالة n ، ثم جد $\lim\limits_{n\to+\infty}(P_{n+1})$

2) $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة كمايلي: $V_n=\ln(U_n)$

أ) بين أن $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها .

ب) نسمي S_{n+1} المجموع : $V_0+V_1+......+V_n$.أحسب S_{n+1} بدلالة n، ثم بين أن $\sin(S_{n+1})=0$

3- أ) نسمي π_{n+1} الجداء : $U_0\times U_1\times......\times U_n$ ، أحسب π_{n+1} بدلالة n

ب) عين الحد U_p بحيث يكون : $\pi_{p+1}=e^{-6\pi}$

التمرين02:

1) تذكير: إذا كان n و p عددين طبيعيين حيث $p\le n$ فإن $C_n^p=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

• بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ومن أجل كل عدد طبيعي p:

حيث $1\le p\le n$ لدينا : $C_n^p=C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^p$

2) كيس يحتوي على 10 قريصات لا نفرق بينها عند اللمس ، 7 منها بيضاء مرقمة من 1 إلى 7 و3منها سوداء مرقمة من1 إلى3. نسحب من هذا الكيس قريصتين في آن واحد.

أ) ♣ نسمي A الحادثة " الحصول على قريصتين بيضاويين"

♣ نسمي B الحادثة " الحصول على قريصتين تحملان رقمين فرديين".

بين أن احتمال A يساوي $\dfrac{7}{15}$. ثم احسب احتمال B.

♣ هل الحادثتان A وB مستقلتان.

ب) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد القريصات البيضاء.

♣ عين قانون احتمال المتغير العشوائي X .

♣ احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

التمرين03:

الجزء الأول:

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة كمايلي : $f(x)=2\ln(e^{x}-2\sqrt{e^{x}}+2)$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1-أ-تحقق أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $e^{x}-2\sqrt{e^{x}}+2=(\sqrt{e^{x}}-1)^{2}+1$ ثم استنتج أن f معرفة على $\mathbb{R}$.

ب-بيّن أن من أجل كل عدد حقيقي x : $1-\dfrac{2}{\sqrt{e^{x}}}+\dfrac{2}{e^{x}}\succ 0$

2- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ وبيّن أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\ln 4$ وفسر النتيجة الثانية هندسيا.

3- أ-بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\dfrac{2\sqrt{e^{x}}(\sqrt{e^{x}}-1)}{(\sqrt{e^{x}}-1)^{2}+1}$ ثم تحقق أن: $f'(0)=0$

ب-أدرس إشارة $(\sqrt{e^{x}}-1)$ على $\mathbb{R}$ واستنتج أن f متزايدة على $[0;+\infty[$ و متناقصة على $]-\infty;0]$

4-أ-تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=2x+2\ln(1-\dfrac{2}{\sqrt{e^{x}}}+\dfrac{2}{e^{x}})$.

ب-بيّن أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=2x$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

5-أ-تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{x}-3\sqrt{e^{x}}+2=(\sqrt{e^{x}}-1)(\sqrt{e^{x}}-2)$.

ب-أدرس أشاره $(\sqrt{e^{x}}-2)$ و $(\sqrt{e^{x}}-1)(\sqrt{e^{x}}-2)$ على $\mathbb{R}$.

جـ-استنتج أنه من أجل كل x من $[0;\ln 4]$ ، $e^{x}-2\sqrt{e^{x}}+2\leq\sqrt{e^{x}}$.

د- بيّن أنه من أجل كل x من $[0;\ln 4]$ ، $f(x)\leq x$.

6-إنشئ المنحنى (C) .

الجزء الثاني:

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

1-بين أنه ومن اجل كل عدد طبيعي n : $0\leq u_n\leq\ln 4$.

2-بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة.

3-استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم حدد نهايتها.

الموضوع الثاني

التمرين01:

1) f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;6[$ كما يأتي : $f(x)=\dfrac{9}{6-x}$ و C_f منحني f
ادرس تغيرات الدالة f ، ثم ارسم C_f

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=-3$ و $n\in\mathbb{N}$ ولدينا : $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ- باستخدام C_f و المستقيم ذي المعادلة $y=x$ ، مثل u_0 و u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل

ب- خمن اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n) .

3 - أ-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n<3$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ب- استنتج أن (u_n) متقاربة و احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\dfrac{1}{u_n-3}$.

أ- أثبت أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج من جديد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين02:

نعتبر نرد على شكل رباعي وجوه منتظم يحمل الأرقام التالية : 1 ، 1 ، 3 ، 5 .

I- نرمي هذا النرد مرتين ، ونعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل رميتين مجموع الرقمين المسجلين على الوجه الأسفل خلال الرميتين.

1)عين مجموعة قيم X .

2) احسب الأمل الرياضي $E(X)$.

II-نرمي هذا النرد عدة مرات متتالية ونعتبر كل رمية مستقلة عن الأخرى.

ليكن u_n احتمال الحادثة التالية : " ظهور رقم 3 لأول مرة على الوجه الأسفل في الرمية ذات الرتبة n" حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

1) احسب u_1 u_2 ، و u_3 . ثم عبارة u_n بدلالة n.

2)•احسب بدلالة n الاحتمال S_n للحادثة التالية : " لا يظهر الرقم 3 على الوجه الأسفل في الرمية ذات الرتبة n+1 "

• احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ، ما يمكن القول عن هذه الحادثة عندما يؤول ن إلى $+\infty$.

التمرين03:

الجزء الأول : نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ حيث

$f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}+\ln|x+1|$ و (C_f) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

احسب : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x)$ و فسّر النتيجة بيانيا .

1- ادرس تغيرات الدالة f .

2- بيّن أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيينها .

3- اكتب معادلتي المماسين للمنحني عند النقطة التي فاصلتها -2 و عند النقطة I .

4- أ) (Γ) المنحني الممثل للدالة h المعرفة على $]-1;+\infty[$ بالعبارة : $h(x)=1+\ln(x+1)$

- احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-h(x)]$ ثم فسّر النتيجة بيانيا .

ب) بيّن أنه يمكن استنتاج رسم المنحني (Γ) انطلاقا من دالة مرجعية بانسحاب يطلب تعيينه

6- بيّن أن المنحني (C_f) يقطع المستقيم ذي المعادلة : $y=3$ في نقطة فاصلتها x_0 من المجال $]-10;-9[$ ونقطة فاصلتها x_1 من المجال $]5;6[$

7- أرسم المماسين و المنحني (Γ) ثم المنحني (C_f) في المجالين $]-10;-1[$ و $]-1;+\infty[$.

الجزء الثاني : نعتبر g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ حيث :

$$\begin{cases} g(x)=e^{(x+2)\ln|x+1|} & x\neq -1 \\ g(-1)=0 \end{cases}$$

1- أ) بيّن أنه لكل عدد حقيقي x يختلف عن -1 فإن : $g(x)=|x+1|e^{(x+1)\ln|x+1|}$

ب) بيّن أن الدالة g مستمرة عند القيمة -1

جـ) ادرس قابلية اشتقاق الدالة g عند القيمة -1 ثم فسّر النتائج هندسيا

د) اكتب معادلتي نصفي المماسين (t_1) و (t_2) عند النقطة التي فاصلتها -1

1- أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-1\}$: $g'(x)=f(x)e^{(x+2)\ln|x+1|}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة g

جـ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ ثم فسّر النتيجة بيانيا

د) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة g

3- ارسم (t_1) و (t_2) ثم المنحني (C_g) في المجال $]-\infty;1]$.

4- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $m^{\frac{1}{x+2}}=|x+1|$

إعداد الأستاذ بالعبيدي محمد العربي