

ثانوية : محمادي أحمد – العناصر –
الموسم الدراسي : 2018/2017

مديرية التربية بولاية برج بوعريريج
امتحان البكالوريا التجريبي للتعليم الثانوي

الشعبة : الثالثة علوم التجريبية

المدة : 3 سا و 30 د

اختبار في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول (4 نقاط) :

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ؛ نعتبر النقط :

$$D(-1; 4; 0) \text{ و } C(0; 3; -1); B(2; 0; -1), A(1; 1; 0)$$

(1) أثبت أن الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع ثم بين أن المعادلة ديكرتية للمستوي (ABC) هي $3x + 2y + z - 5 = 0$.

(2) عين معادلة ديكرتية للمستوي (Q) الذي يحوي المستقيم (AB) و يُعَامِد المستوي (ABC) .

(3) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم المار من النقطة $H(-2; 0; -3)$ و العمودي على المستوي (Q)

(4) أكتب معادلة ديكرتية لسطح الكرة S الذي مركزه H و مماس للمستوي (ABC) ثم أدرس تقاطع سطح الكرة S و المستقيم (CD) .

التمرين الثاني (5 نقاط) :

1/ حل في مجموعة الأعداد المركبة C : $(z - \sqrt{3})(z^2 - \sqrt{3}z + 1) = 0$.

2/ المستوي المركب منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، لتكن A, B و C نقط لواحقها على الترتيب :

$$z_C = \bar{z}_A, \quad z_B = \sqrt{3}, \quad z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

أثبت أن $z_A^{1962} + z_C^{2016} = 0$ ثم عين قيم العد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقي موجب

(3) أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

(4) عين z_E لاحقة النقطة E صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ؛ ثم بين أن

النقط A ؛ C و E في استقامية .

(5) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $\frac{z - z_A}{z - z_C}$ تخيليا صرفا ؛ $(z \neq z_C)$.

التمرين الثالث (4 نقاط)

لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$.

(1) عين العددين الحقيقيين a ، b حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n + 4}$. ثم برهن بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2 < u_n < 1$.

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؛ ثم استنتج أن (u_n) متقاربة

(3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$.

بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أكتب v_n و u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) ثم أحسب المجموع : $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{5}{v_1} + \frac{5^2}{v_2} + \dots + \frac{5^n}{v_n}$.

التمرين الرابع (7 نقاط):

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln x$

1- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ ؛ $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g .

2- ادرس إشارة $g(x)$. (لاحظ أن $g(1)=0$)

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$. وليكن (C) منحناها البياني في المستوي السابق .

1- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$ ؛ $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ ثم احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا .

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$ ؛ $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3- أنشئ المنحنى (C) .

4- بين أن الدالة $h : x \mapsto x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $\ln(x)$ على $]0, +\infty[$ ؛ ثم باستعمال التكامل بالتجزئة

بين أن $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$.

5- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=e$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الاول (5 نقاط) :

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 10 = 0$.
استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول z حيث : $(\bar{z} + 2)^2 - 6(\bar{z} + 2) + 10 = 0$
- (2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A, B, C, D لاحقاتها
 $z_D = 1 - i$ و $z_C = 1 + i$ و $z_B = 3 + i$ و $z_A = 3 - i$
عين الكتابة المركبة للدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$
- (3) النقطة التي لاحقتها $z_E = 7 - 3i$ و F صورتها بالدوران r ؛ تحقق أن لاحقة F هي $z_F = 5 + 3i$
عين لاحقة النقطة H صورة F بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AE}$
- (4) مثل النقط A, B, E, F, H و عين بدقة طبيعة الرباعي $AEHF$
- (5) عين المجموعة (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $z = 1 - i + ke^{-i\frac{\pi}{4}}$ وذلك عندما k يسمح $\mathbb{R}^*$.
عين المجموعة (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $|z - 1 - i| = |z - 1 + i|$.

التمرين الثاني (4 نقاط) :

- يحتوي كيس على 7 كرات منها 3 بيضاء تحمل الأرقام : 1, 2, 2 و أربعة حمراء تحمل الأرقام 1, 2, 2, 1
- (1) نسحب كرة واحدة من الكيس.
أ – ما احتمال الحصول على كرة تحمل الرقم 1.
ب – إذا كانت الكرة المسحوبة تحمل الرقم 1 فما هو احتمال أن يكون لونها أحمر
 - (2) نسحب على التوالي كرتين من الكيس دون ارجاع .
أ – ما احتمال الحصول على كرتين تحمل كل منها رقما فرديا
ب – ما احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون
ج – ما احتمال أن يكون مجموع الرقمين الظاهرين 3

التمرين الثالث (4 نقاط) :

- (u_n) المتتالية العددية المعرفة على N كما يلي : $u_0 = 2$ ومن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n}$
- (1) احسب : u_1 و u_2 ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \leq u_n \leq 4$
 - (2) بين أن (u_n) متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة .

(3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_{n+1} \leq \frac{4 - u_n}{2}$

(4) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الرابع (7 نقاط) :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

حيث a ؛ b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

1- عين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0; -3)$ مماسا معامل توجيهه 3 و العدد

$\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x) = 0$.

2- نضع $a=1$ ، $b=0$ ، $c=-3$

أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

3- أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x=0$ ثم عين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

4- أرسم (T) و (C_f) .

5- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن $f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x}$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

6- أحسب بوحدة المساحات ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما $x=1$ و $x=3$

7- m وسيط حقيقي ؛ ناقش بيانها وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^2 - 3 + me^x = 0$.

انتهى الموضوع الثاني

التصحيح المفصل للاختبار التجريبي للشعبة العلوم التجريبية ماي 2017

الموضوع الأول

التمرين الأول (4 نقاط) :

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(\vec{k}; \vec{j}; \vec{i}; \vec{0})$ ؛ نعتبر النقط :

$A(1; 1; 0)$ ، $B(2; 0; -1)$ ، $C(0; 3; -1)$ و $D(-1; 4; 0)$

(1) اثبات أن الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع معناه ان $\vec{AD} = \vec{BC}$ و لدينا $\vec{AD}(-2; 3; 0)$ و $\vec{BC}(-2; 3; 0)$ و منه محققة

اثبات أن المعادلة ديكارتية للمستوي (ABC) هي $3x + 2y + z - 5 = 0$ لنبين أن النقط الثلاثة تنتمي إلى هذا المستوي

$$3(1) + 2(1) + (0) - 5 = 0 \text{ محققة و منه } A \text{ تنتمي إلى هذا المستوي .}$$

$$3(2) + 2(0) + (-1) - 5 = 0 \text{ محققة و منه } B \text{ تنتمي إلى هذا المستوي .}$$

$$3(0) + 2(3) + (-1) - 5 = 0 \text{ محققة و منه } C \text{ تنتمي إلى هذا المستوي .}$$

$$\text{و منه المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي } 3x + 2y + z - 5 = 0.$$

(2) تعين معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يحوي المستقيم (AB) و يُعامد المستوي (ABC) :

ليكن شعاع الناظيمي للمستوي (Q) هو $\vec{n}(a; b; c)$ و الشعاع الناظيمي للمستوي (ABC) هو $\vec{n}(3; 2; 1)$ و $\vec{AB}(1; -1; -1)$

لدينا (Q) يحوي المستقيم (AB) و يُعامد المستوي يعني أن $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$ و $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$ أي أن

$$\begin{cases} a - b - c = 0 \dots (1) \\ 3a + 2b + c = 0 \dots (2) \end{cases} \text{ بالجمع نجد } b = -4a \text{ بالتعويض في المعادلة (1) نجد } a + 4a - c = 0$$

و منه $c = 5a$ بوضع $a = 1$ نجد أن $\vec{n}'(1; -4; 5)$ و منه معادلة (Q) هي من الشكل

$$x - 4y + 5z + d = 0 \text{ و هو يشمل النقطة } A \text{ نعوض إحداثياتها في المعادلة الديكارتية نجد}$$

$$1 - 4(1) + 5(0) + d = 0 \text{ و منه } d = 3 \text{ معادلة (Q) هي } x - 4y + 5z + 3 = 0$$

(3) تعين تمثيلا وسيطيا للمستقيم المار من النقطة $H(-2; 0; -3)$ و العمودي على المستوي (Q)

$$\begin{cases} x = t - 2 \\ y = -4t \\ z = 5t - 3 \end{cases} \text{ حيث } M(x; y; z) \text{ هو مجموعة النقط}$$

(4) كتابة معادلة ديكارتية لسطح الكرة S الذي مركزه H و مماس للمستوي (ABC) هو مجموعة النقط

$$d(H; ABC) = \frac{|3(-2) + 2(0) + (-3) - 5|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \sqrt{14} \text{ نحسب } HM = d(H; ABC) \text{ حيث } M(x; y; z)$$

$$\text{و منه } (x+2)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 14 \text{ بالتبسيط نجد } x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6z - 1 = 0$$

دراسة الوضع النسبي بين سطح الكرة S و المستقيم (CD)

$$\begin{cases} x = -t \\ y = t + 3 \\ z = t - 1 \end{cases} \text{ لدينا } \vec{CD}(-1; 1; 1) \text{ و منه نعوض في المعادلة}$$

الديكارتية للسطح S نجد $t^2 + (t+3)^2 + (t-1)^2 - 4t + 6(t-1) - 1 = 0$ و منه $3t^2 + 6t + 3 = 0$ و هذا يكافئ

$t^2 + 2t + 1 = 0$ و منه للمعادلة حل مضاعف هو $t = -1$ إذن سطح الكرة يتقاطع مع المستقيم في نقطة أي انه مماس للسطح في النقطة $K(1; 2; -2)$.

التمرين الثاني (5 نقاط) :

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C : $(z - \sqrt{3})(z^2 - \sqrt{3}z + 1) = 0$ يكافئ $z - \sqrt{3} = 0$ او

$$z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0 \text{ أي } z = \sqrt{3} \text{ ونحسب المميز للمعادلة الثانية } \Delta = -1 \text{ للمعادلة حلين هما}$$

$$S = \left\{ \sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i; \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right\} \text{ مجموعة الحلول هي } z'' = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \text{ و } z' = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

(2) المستوي المركب منسوب إلى معلم $(O; \vec{l}; \vec{r})$ ، لتكن A ، B و C نقط لواحقها على الترتيب:

$$z_C = \bar{z}_A, \quad z_B = \sqrt{3}, \quad z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

اثبات أن $z_A^{1962} + z_C^{2016} = 0$ نكتب العددين على الشكل الأسّي $z_A = e^{-i\frac{\pi}{6}}$ و $z_C = e^{i\frac{\pi}{6}}$ و منه

$$z_A^{1962} = e^{-327\pi i} = \cos(-327\pi) + i \sin(-327\pi) = -1 \text{ و } z_A^{1962} = \left(e^{-i\frac{\pi}{6}} \right)^{1962}$$

$$\text{و } z_C^{2016} = \left(e^{i\frac{\pi}{6}} \right)^{2016} \text{ و منه } z_C^{2016} = e^{336\pi i} = \cos(336\pi) + i \sin(336\pi) = +1 \text{ و منه } -1 + 1 = 0$$

تعيين قيم العد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_C} \right)^n$ حقيقي موجب

لدينا مما سبق و حسب دستور موفر

$$\left(\frac{z_A}{z_B} \right)^n = \left(e^{-\frac{\pi i}{3}} \right)^n = e^{-\frac{n\pi i}{3}} = \cos\left(\frac{-n\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{-n\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

يكون عددا حقيقيا موجب يعني ان $\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 1$ و $\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 0$ أي ان $\frac{n\pi}{3} = 2\pi k$ و k عدد طبيعي و منه

نجد $n = 6k$ و k عدد طبيعي

(3) كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي لدينا

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{-\frac{\pi i}{3}}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC بما أن $\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1$ و $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}$ فإن المثلث

ABC متقايس الأضلاع .

(4) تعيين z_E لاحقة النقطة E صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$

$$z_E = 2e^{\frac{\pi}{3}i} z_B + \left(1 - 2e^{\frac{\pi}{3}i}\right) z_A \text{ ومنه}$$

$$z_E = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3}) + (1 - 1 - i\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \text{ ومنه}$$

$$z_E = \sqrt{3} + 3i - i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$z_E - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = 2i \text{ لدينا في استقامية } E \text{ و } C \text{ ؛ } A \text{ أثبات أن النقط}$$

$$z_C - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = i \text{ ومنه } z_E - z_A = 2(z_C - z_A) \text{ أي أن}$$

$$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC} \text{ ومنه النقط } A \text{ ؛ } C \text{ و } E \text{ في استقامية.}$$

$$(5) \text{ تعين مجموعة النقط } M \text{ ذات اللاحقة } z \text{ بحيث يكون } \frac{z - z_A}{z - z_C} \text{ تخيليا صرفا (} z \neq z_C \text{)}$$

$$\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \text{ وهذا يعني أن } (\overrightarrow{MC}; \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2} + \pi k \text{ ومنه}$$

$$\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = 0 \text{ ومنه مجموعة النقط } M \text{ هي الدائرة ذات القطر } [AC].$$

التمرين الثالث (4 نقاط)

$$u_n \text{ لتكن } (u_n) \text{ متتالية معرفة بـ } u_0 = \frac{1}{4} \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$$

$$(1) \text{ تعيين العددين الحقيقيين } a, b \text{ حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n + 4} \text{ بالقسمة الاقليدية نجد}$$

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 12 - 10}{u_n + 4} = 3 - \frac{10}{u_n + 4} \text{ ومنه } a = 3, b = -10$$

$$\text{البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : -2 < u_n < 1$$

$$\text{لدينا } u_0 = \frac{1}{4} \text{ ومنه } -2 < u_0 < 1 \text{ محققة}$$

$$\text{نفرض أن } -2 < u_n < 1 \text{ ونبرهن أن } -2 < u_{n+1}$$

الطريقة الأولى :

$$\text{نبرهن أن } -2 < u_{n+1} \text{ أي } 2 + u_{n+1} > 0$$

$$2 + u_{n+1} = 2 + 3 - \frac{10}{u_n + 4} = \frac{5u_n + 12 - 10}{u_n + 4} = \frac{5u_n + 2}{u_n + 4}$$

$$\text{نبرهن أن } u_{n+1} < 1 \text{ أي } u_{n+1} - 1 < 0$$

$$u_{n+1} - 1 = 3 - \frac{10}{u_n + 4} - 1 = \frac{2u_n + 8 - 10}{u_n + 4} = \frac{2u_n - 2}{u_n + 4} = 2\left(\frac{u_n - 1}{u_n + 4}\right)$$

$$\text{ومنه } -2 < u_{n+1} < 1 \text{ إذن من أجل عدد طبيعي } n \text{ فإن } -2 < u_n < 1$$

الطريقة الثانية :

$$\text{لدينا الدالة المرفقة هي } f \text{ حيث } f(x) = \frac{3x+2}{x+4} \text{ و دالتها المشتقة هي } f'(x) = \frac{10}{(x+4)^2}$$

و منه f متزايدة على المجال $[-2;1]$.

$-2 < u_n < 1$ و منه نجد $f(-2) < f(u_n) < f(1)$ كون أن f متزايدة أي ان $-2 < u_{n+1} < 1$ و منه من أجل عدد طبيعي n فإن $-2 < u_n < 1$

(2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4} - u_n = \frac{3u_n + 2 - u_n^2 - 4u_n}{u_n + 4} = \frac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n + 4} = -\frac{(u_n - 1)(u_n + 2)}{u_n + 4}$$
و منه المتتالية متزايدة .

استنتاج أن (u_n) متقاربة : بما ان المتتالية متزايدة و محدودة من الاسفل فهي متقاربة .
(3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$.

تبين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول لدينا

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2}{1 - u_{n+1}} = \frac{\frac{3u_n + 2}{u_n + 4} + 2}{1 - \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}} = \frac{3u_n + 2 + 2u_n + 8}{u_n + 4 - 3u_n - 2} = \frac{5u_n + 10}{-2u_n + 2} = \frac{5}{2} \left(\frac{u_n + 2}{1 - u_n} \right) = \frac{5}{2} v_n$$

$$v_0 = \frac{u_0 + 2}{1 - u_0} = \frac{\frac{1}{4} + 2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{9}{3} = 3 \text{ و حدها الأول } \frac{5}{2} \text{ هندسية أساسها } (v_n)$$

$$v_n = 3 \left(\frac{5}{2} \right)^n \text{ كتابة } v_n \text{ و } u_n \text{ بدلالة } n :$$

$$\text{لدينا } v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n} \text{ أي ان } v_n - u_n v_n = u_n + 2 \text{ و منه } u_n + u_n v_n = v_n - 2 \text{ أي ان } u_n(1 + v_n) = v_n - 2$$

$$\text{منه } u_n = \frac{v_n - 2}{1 + v_n} = \frac{3 \left(\frac{5}{2} \right)^n - 2}{1 + 3 \left(\frac{5}{2} \right)^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \left(\frac{5}{2} \right)^n - 2}{1 + 3 \left(\frac{5}{2} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \left(\frac{5}{2} \right)^n}{3 \left(\frac{5}{2} \right)^n} = 1 \text{ حساب}$$

$$(4) \text{ حساب المجموع : } S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{5}{v_1} + \frac{5^2}{v_2} + \dots + \frac{5^n}{v_n} \text{ بوضع } t_n = \frac{5^n}{v_n} = \frac{5^n}{3 \left(\frac{5}{2} \right)^n} = \frac{2^n}{3} \text{ و منه } (t_n) \text{ متتالية هندسية}$$

$$S_n = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_n = t_0 \left(\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \right) = \frac{1}{3} (2^{n+1} - 1) \text{ و } t_0 = \frac{1}{v_0} = \frac{1}{3} \text{ أساسها } 2 \text{ و حدها الأول}$$

التمرين الرابع (7 نقاط):

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x$

1- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x^2} = \frac{(x-1)^2}{x^2} \quad \text{و} \quad g(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln(x)$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة g مما سبق نجد أن $g'(x) \geq 0$ و منه الدالة g متزايدة على $]0, +\infty[$.

2- دراسة إشارة $g(x)$ بما أن $g(1) = 0$ و الدالة g متزايدة على $]0, +\infty[$ نتلخص الإشارة في الجدول الموالي

x	0	1	$+\infty$
إشارة $g'(x)$	—	0	+

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$. وليكن (C) منحناها البياني في المستوي السابق .

1- اثبات أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ نضع $t = \sqrt{x}$ و منه $\lim_{x \rightarrow +\infty} (t) = +\infty$ و منه

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(t)}{t} \right] = 0 \quad \text{لان} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(x)]^2}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(t^2)]^2}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{2\ln(t)}{t} \right]^2 = 0$$

$$\text{حساب} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 + \frac{1}{x^2} - \frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{2}{x} \right] = +\infty$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{2}{x} \right] = 0$$

التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$ ؛ $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ ؛ لدينا

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + x - \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right) \right)^2 - 2 = x + \frac{1}{x} - (-\ln x)^2 - 2 = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2 = f(x)$$

حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ؛ و منه المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقارب عموديا معادلته $x = 0$.

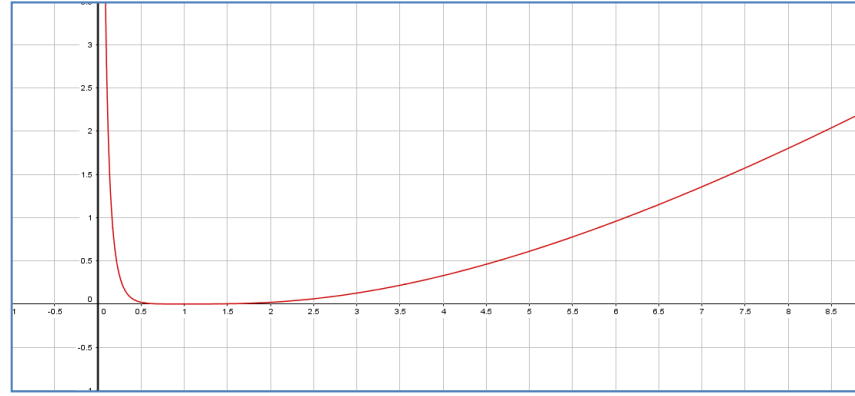
2- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$ ؛ $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ بالحساب $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$ و منه

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} - 2\frac{1}{x}(\ln x) = \frac{x^2 - 1 - 2x \ln x}{x^2} = \frac{x - \frac{1}{x} - 2\ln x}{x} = \frac{g(x)}{x}$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
-----	---	---	-----------

$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 0	$\nearrow$ $+\infty$



3- رسم المنحنى (C) :

4- بين أن الدالة $h : x \mapsto x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x)$ على $]0, +\infty[$

$$h'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x \text{ محققة}$$

باستعمال التكامل بالتجزئة

$$\text{تبين أن } \int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2 \text{ بوضع } u'(x) = 1 \text{ و } v(x) = (\ln x)^2 \text{ و منه } u(x) = x \text{ و } v'(x) = \frac{2}{x}(\ln x)$$

$$\text{و منه } u'(x) = 1 \text{ و } \int_1^e u'(x) \cdot v(x) dx = \left[x (\ln(x))^2 \right]_1^e - 2 \int_1^e \ln(x) dx = e - 2 \left[x \ln x - x \right]_1^e = e - 2$$

5- حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = e$ و $x = 1$

$$\int_1^e f(x) dx = \int_1^e \left[x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2 \right] dx = \left[\frac{1}{2} x^2 + \ln(x) - 2x \right]_1^e - e + 2$$

$$\int_1^e f(x) dx = \frac{e^2}{2} + 1 - 2e + \frac{3}{2} - e + 2 = \left(\frac{e^2}{2} - 3e + \frac{9}{2} \right) u.a$$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول (5 نقاط) :

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 10 = 0$ نحسب المميز $\Delta = -4$ للمعادلة حلين هما $z' = 3 + i$ و $z'' = 3 - i$

استنتاج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول z حيث : $(\bar{z} + 2)^2 - 6(\bar{z} + 2) + 10 = 0$ مما سبق نجد أن للمعادلة تكافئ $\bar{z} + 2 = 3 + i$ أو $\bar{z} + 2 = 3 - i$ أي أن $\bar{z} = 1 + i$ و $\bar{z} = 1 - i$ و منه $z = 1 + i$ أو $z = 1 - i$ هما حل للمعادلة الأخيرة

(2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A, B, C, D لاحقاً

$$z_A = 3 - i \text{ و } z_B = 3 + i \text{ و } z_C = 1 + i \text{ و } z_D = 1 - i$$

تعيين الكتابة المركبة للدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$: هي $z' - z_A = i(z - z_A)$ أي $z' - 3 + i = i(z - 3 + i)$ و

$$\text{منه } z' = iz + 2 - 4i$$

(3) النقطة التي لاحقها $z_E = 7 - 3i$ و F صورتها بالدوران r

التحقق أن لاحقة F هي $z_F = 5 + 3i$ لدينا $z_F = iz_E + 2 - 4i = i(7 - 3i) + 2 - 4i = 7i + 3 + 2 - 4i = 5 + 3i$ محققة

تعيين لاحقة النقطة H صورة F بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AE}$ أي $z_H - z_F = z_E - z_A$ و منه $z_H = z_F + z_E - z_A = 5 + 3i + 7 - 3i - 3 + i = 9 + i$

(4) تمثيل النقاط A, B, E, F, H

تعيين بدقة طبيعة الرباعي $AEHF$ متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة و فيه ضلعان متجاورتان متقايسان فهو مربع .

(5) تعيين المجموعة (Γ) مجموعة النقاط M ذات

اللاحقة z حيث : $z = 1 - i + ke^{-i\frac{\pi}{4}}$ وذلك عندما

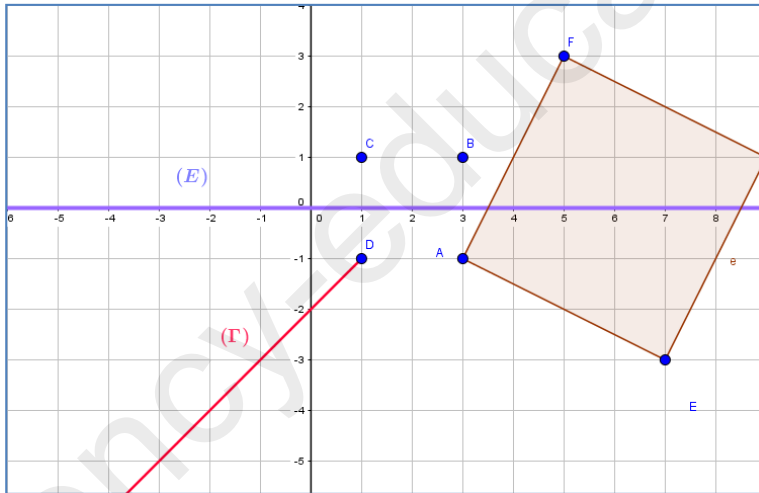
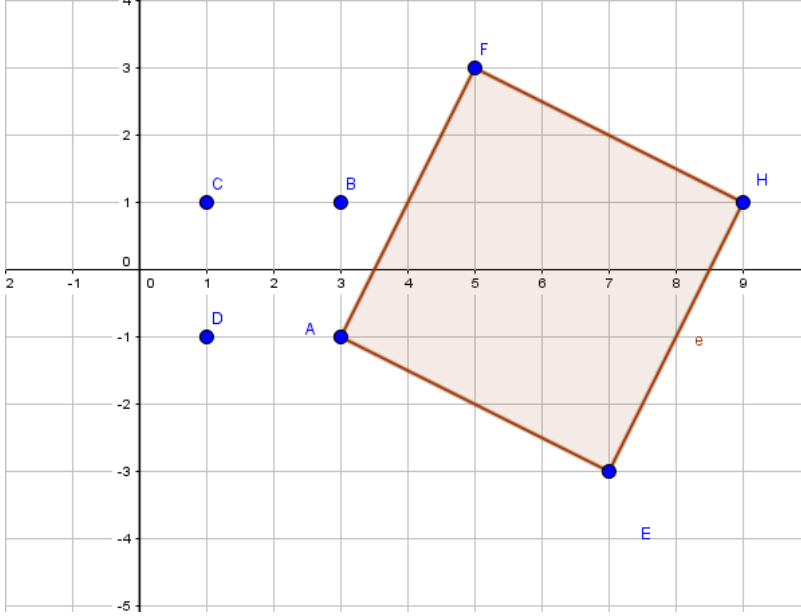
k يسمح $\mathbb{R}^*$ لدينا $z = 1 - i + ke^{-i\frac{\pi}{4}}$ يعني أن

$$z - (1 - i) = ke^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\arg[z - (1 - i)] = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\left(\overrightarrow{0I}; \overrightarrow{DM}\right) = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \text{ و } k \text{ عدد صحيح}$$

مجموعة النقاط هي نصف مستقيم $[DM)$ و الذي معامل توجيهه -1 أي موازي للمنصف الثاني ذي المعادلة $(y = -x)$



تعيين المجموعة (E) مجموعة النقاط M ذات اللاحقة

z حيث : $|z - 1 - i| = |z - 1 + i|$ تكافئ $CM = DM$

مجموعة النقاط هي محور القطعة المستقيمة $[CD)$.

التمرين الثاني (4 نقاط) :

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على N كما يلي : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n}$

$$(1) \text{ حساب : } u_1 = 5 - \frac{4}{2} = 3 \text{ و } u_2 = 5 - \frac{4}{3} = \frac{11}{3}$$

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \leq u_n \leq 4$

لدينا $2 \leq u_1 \leq 4$ محققة

نفرض أن $2 \leq u_n \leq 4$ ولنبرهن أن $2 \leq u_{n+1} \leq 4$

$$2 \leq u_n \leq 4 \text{ بالقلب نجد } \frac{1}{2} \geq \frac{1}{u_n} \geq \frac{1}{4} \text{ بالضرب في } -4 \text{ نجد } -2 \leq -\frac{4}{u_n} \leq -1 \text{ بإضافة 5 نجد}$$

$$3 \leq 5 - \frac{4}{u_n} \leq 4 \text{ أي ان } 2 \leq 3 \leq u_{n+1} \leq 4 \text{ و منه } 2 \leq u_{n+1} \leq 4 \text{ إذن من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ فإن}$$

$$2 \leq u_n \leq 4$$

(2) تبين أن (u_n) متزايدة : نحسب الفرق

$$u_{n+1} - u_n = 5 - \frac{4}{u_n} - u_n = \frac{5u_n - 4 - u_n^2}{u_n} = \frac{(4 - u_n)(-1 + u_n)}{u_n}$$

الفرق موجب لان $2 \leq u_n \leq 4$ فإن $4 - u_n \geq 0$ و $-1 + u_n \geq 0$ و هو المطلوب .

استنتاج أنها متقاربة : بما المتتالية متزايدة و محدود من الأعلى فهي متقاربة .

$$(1) \text{ البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : 4 - u_{n+1} \leq \frac{4 - u_n}{2}$$

$$\text{لدينا } 4 - u_{n+1} = 4 - 5 + \frac{4}{u_n} = -1 + \frac{4}{u_n} = \frac{-u_n + 4}{u_n} = \frac{1}{u_n}(4 - u_n)$$

$$\text{و بما ان } 2 \leq u_n \leq 4 \text{ بالقلب نجد } \frac{1}{4} \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2} \text{ و منه } 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$$

$$(2) \text{ استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : 0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ مما سبق نجد أن } 0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$$

$$\text{و منه } 0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n) \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(4 - u_{n-1}) \right] \text{ أي } 0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^2}(4 - u_{n-1}) \text{ و ها كذا}$$

$$0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^2}(4 - u_{n-1}) \leq \frac{1}{2^2} \left[\frac{1}{2}(4 - u_{n-2}) \right] \text{ أي ان } 0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^3}(4 - u_{n-2}) \text{ إلى أن}$$

نصل إلى التعميم $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}(4 - u_0)$ و منه $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}(4 - u_0)$ اي ان

(2) $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ اي ان $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^n}$ بتعويض نجد $0 \leq 4 - u_{n'} \leq \frac{1}{2^{n'-1}}$ و هو المطلوب .

بحساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ بما أن $0 \leq 4 - u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$ فحسب الحصر نجد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

التمرين الرابع (7 نقاط) :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

حيث a ؛ b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

1- تعيين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0; -3)$ مماسا معامل توجيهه 3 و العدد

$$\sqrt{3} \text{ حل للمعادلة } f(x) = 0 .$$

$$f(0) = -3 \text{ و هذا يعني } c = -3$$

$$\text{و لدينا } f'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = [-ax^2 + (2a - b)x + b - c]e^{-x}$$

$$f'(0) = 3 \text{ يعني أن } b - c = 3 \text{ ; و منه } b = 0$$

$$f(\sqrt{3}) = 0 \text{ يعني أن } f(\sqrt{3}) = (3a - 3)e^{-\sqrt{3}} = 0 \text{ و منه } a = 1$$

$$2- \text{ نضع } a = 1, b = 0, c = -3 \text{ تصبح } f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$$

$$\text{بحساب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \text{ لأنه بوضع } x = 2t \text{ نجد}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4t^2}{e^{2t}} \right] = 4 \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{e^t} \right)^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2)e^{-x} = +\infty$$

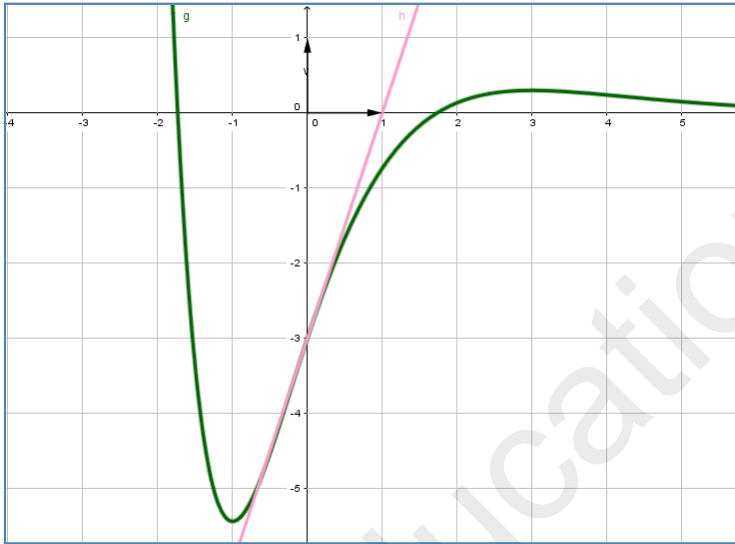
دراسة اتجاه تغير الدالة f : المشتقة : $f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x}$ إشارتها من إشارة $(-x^2 + 2x + 3)$

تتعدم عند العددين 3 و -1 و منه f متناقصة على المجالين $]-\infty; -1]$ و $[3; +\infty[$ متزايدة على المجال $[-1; 3]$

و شكل جدول تغيراتها :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$-2e$	$\frac{6}{e^3}$	0

- 3- كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$ معادلة المماس هي $y = 3x - 3$
تعيين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل
 $f(x) = 0$ يكافئ $x^2 - 3 = 0$ اي ان $x = \sqrt{3}$ او $x = -\sqrt{3}$ نقطتي التقاطع هما $B(\sqrt{3}; 0)$ و $C(-\sqrt{3}; 0)$



- 4- رسم (T) و (C_f)
5- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x}$$

$$f(x) = (x^2 - 3)e^{-x} \text{ و } f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x}$$

$$f''(x) = (x^2 - 4x - 1)e^{-x} \text{ أي ان } f''(x) = (-2x + 2)e^{-x} + (x^2 - 2x - 3)e^{-x}$$

$$\text{و منه } f(x) + 2f'(x) + f''(x) = (x^2 - 3 - 2x^2 + 4x + 6 + x^2 - 4x - 1)e^{-x} = 2e^{-x}$$

استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x} \text{ يكافئ } f(x) = -2f'(x) - f''(x) + 2e^{-x} \text{ و منه الدالة الأصلية للدالة } f \text{ هي}$$

$$\text{الدالة } F \text{ حيث } F(x) = -2f(x) - f'(x) - 2e^{-x} \text{ أي } F(x) = -2(x^2 - 3)e^{-x} - (-x^2 + 2x + 3)e^{-x} - 2e^{-x}$$

$$\text{أي } F(x) = (-x^2 - 2x + 1)e^{-x} \text{ و } F(x) = (-2x^2 + 6)e^{-x} + (x^2 - 2x - 3)e^{-x} - 2e^{-x}$$

- 6- حساب بوحدة المساحات ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = 1$ و $x = 3$ هي

$$A = \int_1^{\sqrt{3}} f(x) dx + \int_{\sqrt{3}}^3 f(x) dx = [-F(x)]_1^{\sqrt{3}} + [F(x)]_{\sqrt{3}}^3 = (4 + 4\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}} + 2e^{-1} + (-14)e^{-3}$$

$$A = \left[(4 + 4\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}} + 2e^{-1} + (-14)e^{-3} \right] u.a$$

7- m وسيط حقيقي ناقش بيانها وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^2 - 3 + me^x = 0$

المعادلة تكافئ $me^x = -(x^2 - 3)$ أي أن $-m = (x^2 - 3)e^{-x}$ يكافئ $-m = f(x)$

حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = -m$

المناقشة

لما $-m < -2e$ أي أن $m > 2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) لا يتقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول .

لما $-m = -2e$ أي أن $m = 2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة و منه للمعادلة حل وحيد سالب .

لما $-3 < -m < -2e$ أي أن $3 < m < 2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما سالبتان و منه للمعادلة حلين سالبين

لما $-m = -3$ أي أن $m = 3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين إحداها فاصلتها معدومة و الأخرى فاصلتها سالبة و منه للمعادلة حلين إحداها معدوم و الآخر سالب .

لما $-3 > -m > 0$ أي أن $0 \leq m < 3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة و منه للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة .

لما $0 > -m > \frac{6}{e^3}$ أي أن $-\frac{6}{e^3} < m < 0$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في ثلاثة نقاط نقطتان فاصلتهما موجبتان و نقطة فاصلتها سالبة و منه للمعادلة حلين موجبان و حل سالب .

لما $-\frac{6}{e^3} = -m$ أي أن $m = -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة و منه للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة

لما $\frac{6}{e^3} > -m > \frac{6}{e^3}$ أي أن $m < -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة فاصلتهما سالبة و منه للمعادلة حل وحيد سالب .

انتهى الموضوع الثاني

اختبار بكالوريا تجريبي شعبة الثالثة علوم تجريبية

الموضوع الأول

التمارين	عناصر الإجابة		التنقيط	
			مجزأة	كاملة
التمرين الأول	1) اثبات أن الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع معناه أن $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ و لدينا $\overrightarrow{AD}(-2; 3; 0)$ و $\overrightarrow{BC}(-2; 3; 0)$ و منه محققة		0.25	04 ن
			0.75	
	اثبات أن المعادلة ديكراتية للمستوي (ABC) هي $3x + 2y + z - 5 = 0$ لنبين أن النقط الثلاثة تنتمي إلى هذا المستوي A و B و C		0.5	
	2) تعين معادلة ديكراتية للمستوي (Q) الذي يحوي المستقيم (AB) و يُعادم المستوي (ABC) ليكن شعاع الناظمي للمستوي (Q) هو $\vec{n}(1; -4; 5)$ و منه معادلة (Q) هي $x - 4y + 5z + 3 = 0$		0.5	
	3) تعين تمثيلا وسيطيا للمستقيم المار من النقطة $H(-2; 0; -3)$ و العمودي على المستوي			

0.5	(Q)	
	$\begin{cases} x = t - 2 \\ y = -4t : t \in \mathbb{R} \\ z = 5t - 3 \end{cases}$	
0.25	4) كتابة معادلة ديكارتية لسطح الكرة S الذي مركزه H و مماس للمستوي (ABC) نحسب	
0.25	$d(H; ABC) = \frac{ 3(-2) + 2(0) + (-3) - 5 }{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \sqrt{14}$	
0.25	$x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6z - 1 = 0$	
0.25	دراسة الوضع النسبي بين سطح الكرة S و المستقيم (CD)	
0.25	$\begin{cases} x = -t' \\ y = t' + 3 : t' \in \mathbb{R} \\ z = t' - 1 \end{cases}$	
0.5	للسطح S نجد $3t'^2 + 6t' + 3 = 0$ و هذا يكافئ $t'^2 + 2t' + 1 = 0$ و منه للمعادلة حل مضاعف هو $t' = -1$ إذن سطح الكرة يتقاطع مع المستقيم في نقطة أي انه مماس للسطح في النقطة $K(1; 2; -2)$.	
5	التمرين الثاني	
1	1) حلول المعادلة $z = \sqrt{3}$ و نحسب المميز $\Delta = -1$ للمعادلة حلين هما $z' = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ و $z'' = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$	
0.5	2) اثبات أن $z_A^{1962} + z_C^{2016} = 0$ نكتب العددين على الشكل الأسّي $z_A = e^{-i\frac{\pi}{6}}$ و $z_C = e^{i\frac{\pi}{6}}$	
0.5	و $z_A^{1962} = e^{-327\pi i} = -1$ و $z_C^{2016} = e^{336\pi i} = 1$ و منه $-1 + 1 = 0$	
0.5	تعيين قيم العد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقي موجب	
0.5	$n = 6k$ و k عدد طبيعي	
0.5	3) كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي لدينا $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-\frac{\pi}{3}i}$	
0.5	المثلث ABC متقايس الأضلاع.	
0.5	4) تعيين z_E لاحقة النقطة E : $z_E = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$	
0.5	اثبات أن النقط A ؛ C و E في استقامية لدينا $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC}$ و منه النقط A ؛ C و E في استقامية.	
0.5	5) تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $\frac{z - z_A}{z - z_C}$ تخيليا صرفا	
1	$\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z}$ يعني أن $(z \neq z_C)$ و هذا يعني أن	

		و منه $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$ و منه مجموعة النقط M هي الدائرة ذات القطر $[AC]$. $(\overrightarrow{MC}; \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2} + \pi k$	
4 ن	0.25	(1) تعيين العددين الحقيقيين a ، b : $a = 3$ ، $b = -10$ البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2 < u_n < 1$ لدينا $u_0 = \frac{1}{4}$ و منه $-2 < u_0 < 1$ محققة نفرض أن $-2 < u_n < 1$ و لنبرهن أن $-2 < u_{n+1} < 1$ نبرهن أن $-2 < u_{n+1}$ أي $2 + u_{n+1} > 0$ $2 + u_{n+1} = 2 + 3 - \frac{10}{u_n + 4} = \frac{5u_n + 12 - 10}{u_n + 4} = \frac{5u_n + 2}{u_n + 4}$ منه $2 + u_{n+1} > 0$ لان $2 + u_n > 0$ و منه $2 + u_{n+1} > 0$ نبرهن أن $u_{n+1} < 1$ أي $u_{n+1} - 1 < 0$ $u_{n+1} - 1 = 3 - \frac{10}{u_n + 4} - 1 = \frac{2u_n + 8 - 10}{u_n + 4} = \frac{2u_n - 2}{u_n + 4} = 2 \left(\frac{u_n - 1}{u_n + 4} \right)$ لان عدد سالب لان $-2 < u_n < 1$ و منه $u_{n+1} < 1$ و منه $-2 < u_{n+1} < 1$ إذن من أجل عدد طبيعي n فإن $-2 < u_n < 1$ (2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) : $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(u_n + 2)}{u_n + 4}$ الفرق موجب لأن $-2 < u_n < 1$ و منه المتتالية متزايدة . استنتاج أن (u_n) متقاربة : بما ان المتتالية متزايدة و محدودة من الاسفل فهي متقاربة . (3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$. تبين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول لدينا $v_{n+1} = \frac{5}{2} v_n$ و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ و حدها الأول $v_0 = 3$ كتابة v_n و u_n بدلالة n : $v_n = 3 \left(\frac{5}{2} \right)^n$ و منه $u_n = \frac{3 \left(\frac{5}{2} \right)^n - 2}{1 + 3 \left(\frac{5}{2} \right)^n}$ حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ (4) حساب المجموع : $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{5}{v_1} + \frac{5^2}{v_2} + \dots + \frac{5^n}{v_n}$ منه $S_n = \frac{1}{3} (2^{n+1} - 1)$	0.25 0.25 0.5 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 1

التمرين الثالث

(I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln x$

0.5 1- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$:

0.5 استنتاج اتجاه تغير الدالة g مما سبق نجد أن $g'(x) \geq 0$ و منه الدالة g متزايدة على $]0, +\infty[$.

2- دراسة إشارة $g(x)$ بما أن $g(1) = 0$ و الدالة g متزايدة على $]0, +\infty[$ نتلخص الإشارة في الجدول الموالي

0.5	x	0	1	$+\infty$
	إشارة $g'(x)$	—	0	+

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$ اثبات أن

0.5 0-1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ نضع $t = \sqrt{x}$ و منه $\lim_{x \rightarrow +\infty} (t) = +\infty$ و منه

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(t)}{t} \right] = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(x)]^2}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(t^2)]^2}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{2 \ln(t)}{t} \right]^2 = 0$$

0.25 حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

0.25 التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$: $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ ؛ J

0.25 حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و منه المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقارب

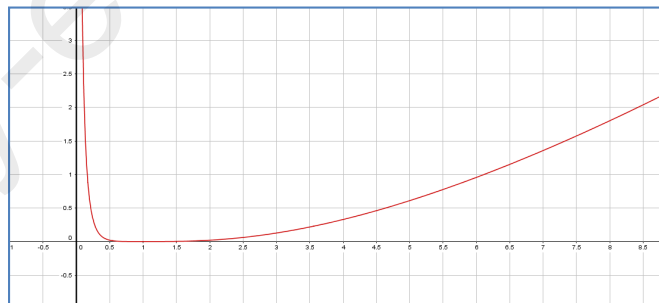
0.25 عموديا معادلته $x = 0$.

0.5 2- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ ؛

0.5 جدول تغيرات الدالة f :

0.5	x	0	1	$+\infty$
	$f'(x)$	—	0	+
	$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

3- رسم المنحني (C) :



1

4- بين أن الدالة

$$h : x \mapsto x \ln x - x$$

هي دالة أصلية للدالة

$$x \mapsto \ln(x)$$

$$]0, +\infty[$$

$$h'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$$

باستعمال التكامل بالتجزئة

0.25	تبين أن $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$ بوضع $u'(x)=1$ و $v(x)=(\ln x)^2$ و منه $u(x)=x$ و
0.75	و $u'(x)=1$ و منه $v'(x)=\frac{2}{x}(\ln x)$
1	$\int_1^e u'(x)v(x)dx = \left[x (\ln(x))^2 \right]_1^e - 2 \int_1^e \ln(x)dx = e - 2 \left[x \ln x - x \right]_1^e = e - 2$ 5- حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=e$ و $x=1$ $\int_1^e f(x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + \ln(x) - 2x \right]_1^e - e + 2$ و منه $\int_1^e f(x)dx = \int_1^e \left[x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2 \right] dx$ $\cdot \int_1^e f(x)dx = \frac{e^2}{2} + 1 - 2e + \frac{3}{2} - e + 2 = \left(\frac{e^2}{2} - 3e + \frac{9}{2} \right) u.a$

الموضوع الثاني

التمارين	عناصر الإجابة	التنقيط
		كاملة مجزأة

0.5

(1) حل المعادلتين في محاسب المميز $\Delta = -4$ للمعادلة حلي هما $z' = 3 - i$ و $z'' = 3 + i$

0.5

استنتاج حلول المعادلة $(\bar{z} + 2)^2 - 6(\bar{z} + 2) + 10 = 0$ مما سبق نجد أن منه $z = 1 + i$ او $z = 1 - i$ هما حلي المعادلة الأخيرة

1

(2) تعيين الكتابة المركبة للدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$: هي

0.5

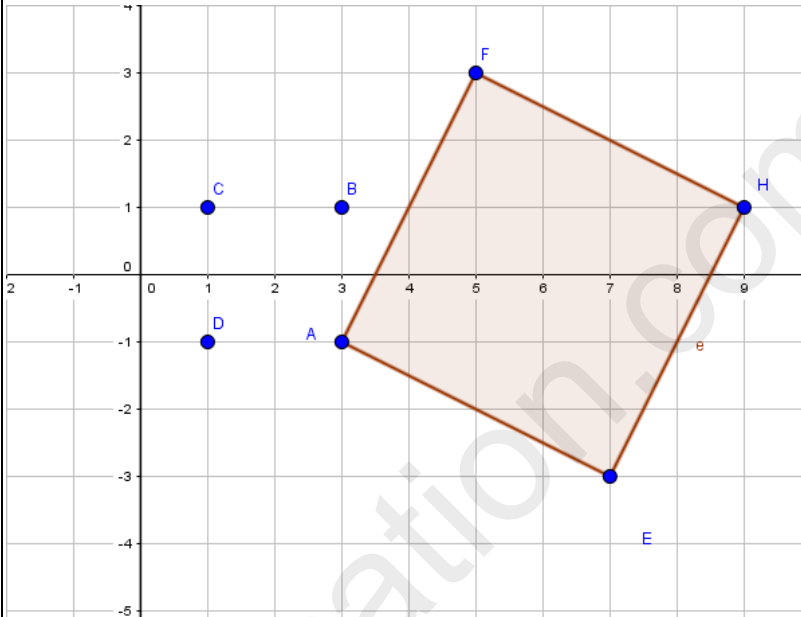
$z' = iz + 2 - 4i$ و منه $z' - 3 + i = i(z - 3 + i)$ أي $z' - z_A = i(z - z_A)$

0.5

(3) التحقق أن لاحقة F هي $z_F = 5 + 3i$ لدينا $z_F = 5 + 3i$ محققة

تعيين لاحقة النقطة H صورة F بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AE}$ أي $z_H = 9 + i$.

0.5



(4) تمثيل النقاط A ، H و F ، E ، B

تعيين بدقة طبيعة

الرباعي

$AEHF$

متوازي أضلاع

فيه زاوية قائمة و

فيه ضلعان

متجاورتان

متقايسان فهو

مربع .

0.5

(5) تعيين المجموعة

(Γ) هي

نصف مستقيم

0.5

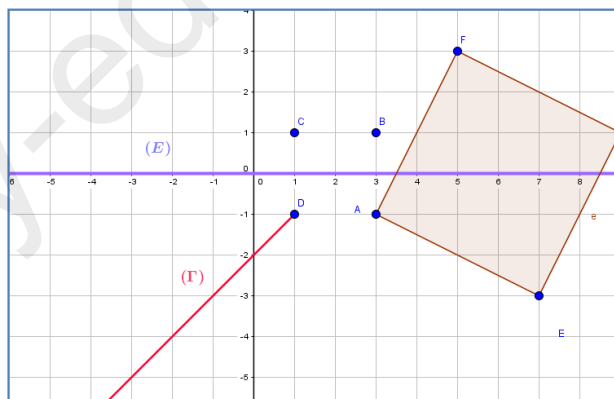
$[DM]$ و الذي معامل توجيهه -1 (أي موازي للمنصف الثاني ذي المعادلة $y = -x$)

تعيين المجموعة (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $|z - 1 - i| = |z - 1 + i|$

تكافئ $CM = DM$ مجموعة النقط

هي محور القطعة المستقيمة $[CD]$

0.5



4

0.5

(1) أ- احتمال الحصول على كرة تحمل الرقم 1 هو $P(A) = \frac{3}{7}$

0.5

ب- B الحادثة للحصول على كرة حمراء $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

	0.75	$P_A(B) = \frac{\frac{4}{7} \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{7}} = \frac{2}{3}$	
	0.5	2 أ- احتمال الحصول على كرتين تحمل رقما فرديا : $P(c) = \frac{1}{7}$	
	0.5	ب- احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون : $P(D) = \frac{3}{7}$	
	0.25 0.25 0.25	ج- احتمال أن يكون مجموع الرقمين الظاهرين 3 : $P(E) = \frac{3}{14}$	
4	+0.25 0.25	(1) حساب : $u_1 = 5 - \frac{4}{2} = 3$ و $u_2 = 5 - \frac{4}{3} = \frac{11}{3}$ البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 2 \leq u_n \leq 4$ لدينا $2 \leq u_1 \leq 4$ محققة نفرض أن $2 \leq u_n \leq 4$ و لنبرهن أن $2 \leq u_{n+1} \leq 4$ $2 \leq u_n \leq 4$ بالقلب نجد $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{u_n} \geq \frac{1}{4}$ بالضرب في -4 نجد $-2 \leq -\frac{4}{u_n} \leq -1$ بإضافة 5 نجد $3 \leq 5 - \frac{4}{u_n} \leq 4$ أي أن $2 \leq 3 \leq u_{n+1} \leq 4$ و منه $2 \leq u_{n+1} \leq 4$ إذن	<u>التمرين</u> <u>الثالث</u>

		من أجل كل عدد طبيعي n فإن $2 \leq u_n \leq 4$. (2) تبين أن (u_n) متزايدة : نحسب الفرق $u_{n+1} - u_n = \frac{(4 - u_n)(-1 + u_n)}{u_n}$ الفرق موجب. استنتاج أنها متقاربة : بما المتتالية متزايدة و محدود من الأعلى فهي متقاربة . 1- البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_{n+1} \leq \frac{4 - u_n}{2}$ لدينا $4 - u_{n+1} = \frac{1}{u_n}(4 - u_n)$ و بما أن $2 \leq u_n \leq 4$ بالقلب نجد $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n) \text{ و منه } \frac{1}{4} \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2}$ 2- استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ مما سبق نجد أن 0.5 $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n) \text{ و منه}$ $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n) \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(4 - u_{n-1}) \right] \text{ أي}$ $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^2}(4 - u_{n-1}) \text{ و ها كذا}$ $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^2} \left[\frac{1}{2}(4 - u_{n-2}) \right]$ $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^3}(4 - u_{n-2}) \text{ إلى أن نصل إلى التعميم}$ $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}(4 - u_0) \text{ و منه } 0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}(4 - u_0) \text{ أي}$ ان (2) $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ أي ان $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^n}$ بتعويض نجد $0 \leq 4 - u_{n'} \leq \frac{1}{2^{n'-1}} \text{ و هو المطلوب .}$ حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ بما أن $n' = n + 1$ و $0 \leq 4 - u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ 0.5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \text{ فحسب الحصر نجد } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$	
7) (نقاط)	1	1- تعيين الأعداد الحقيقية a؛ b و c : $a = -3$ و $a = 1$ و $b = 0$ 2- $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$	التمرين الرابع

0.25
0.25

حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
دراسة اتجاه تغير الدالة f : المشتقة : $f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x}$ إشارتها
من إشارة $(-x^2 + 2x + 3)$ تنعدم عند العددين 3 و -1 و منه f متناقصة
على المجالين $[-\infty; -1]$ و $[3; +\infty[$ متزايدة على المجال $[-1; 3]$
و شكل جدول تغيراتها :

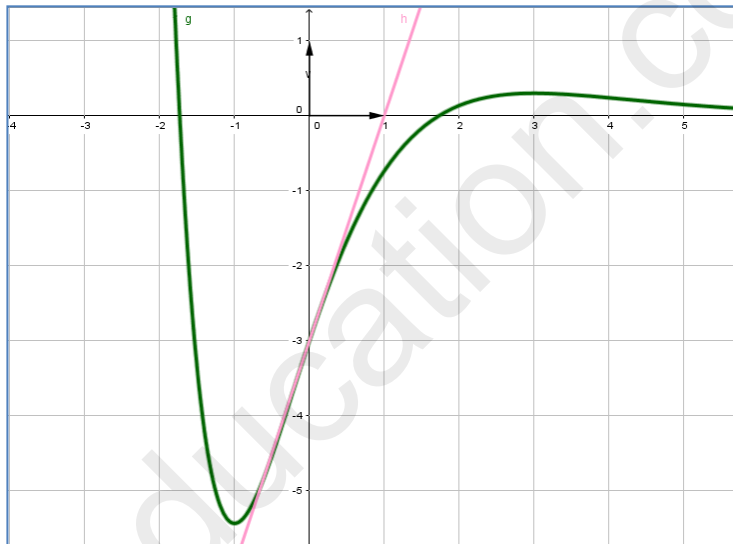
x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$-2e$	$\frac{6}{e^3}$	0

3- كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$ معادلة

المماس هي $y = 3x - 3$

تعيين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

$f(x) = 0$ يكافئ $x^2 - 3 = 0$ اي ان $x = \sqrt{3}$ او $x = -\sqrt{3}$ نقطتي التقاطع
هما $B(\sqrt{3}; 0)$ و $C(-\sqrt{3}; 0)$



4- رسم (T) و (C_f)

5- تبين أنه من أجل كل

عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$
فإن

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x}$$

$$f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x} \text{ و } f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$$

$$f''(x) = (-2x + 2)e^{-x} + (x^2 - 2x - 3)e^{-x}$$

$$f''(x) = (x^2 - 4x - 1)e^{-x}$$

و منه

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = (x^2 - 3 - 2x^2 + 4x + 6 + x^2 - 4x - 1)e^{-x} = 2e^{-x}$$

استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x} \text{ يكافئ } f(x) = -2f'(x) - f''(x) + 2e^{-x} \text{ و } f(x) = -2f'(x) - f''(x) + 2e^{-x}$$

منه الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F حيث $F(x) = -2f(x) - f'(x) - 2e^{-x}$

$$\text{أي } F(x) = -2(x^2 - 3)e^{-x} - (-x^2 + 2x + 3)e^{-x} - 2e^{-x}$$

0.5	$F(x) = (-2x^2 + 6)e^{-x} + (x^2 - 2x - 3)e^{-x} - 2e^{-x}$ و منه $F(x) = (-x^2 - 2x + 1)e^{-x}$ 6- حساب بوحدة المساحات ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 3$ هي $A = \int_1^{\sqrt{3}} -f(x)dx + \int_{\sqrt{3}}^3 f(x)dx = [-F(x)]_1^{\sqrt{3}} + [F(x)]_{\sqrt{3}}^3 = (4 + 4\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}} + 2e^{-1} + (-14)e^{-3}$	
1	$A = [(4 + 4\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}} + 2e^{-1} + (-14)e^{-3}]u.a$ 7- m وسيط حقيقي ناقش بيانها وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^2 - 3 + me^x = 0$ المعادلة تكافئ $me^x = -(x^2 - 3)$ أي ان $-m = (x^2 - 3)e^{-x}$ يكافئ	
0.25	$-m = f(x)$ حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع المنحني (C_f) المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = -m$ المناقشة	
0.75	لما $-m < -2e$ أي ان $m > 2e$ نلاحظ ان (Δ_m) و (C_f) لا يتقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول . لما $-m = -2e$ أي ان $m = 2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب. لما $-m > -2e$ أي ان $3 < m < 2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما سالبان ومنه للمعادلة حلين سالبين لما $-m = -3$ أي ان $m = 3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين إحداها فاصلتها معدومة و الأخرى فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين إحداها معدوم و الآخر سالب . لما $-m > -3$ أي ان $0 \leq m < 3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة . لما $-m > 0$ أي ان $-\frac{6}{e^3} < m < 0$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في ثلاثة نقاط نقطتان فاصلتهما موجبتان و نقطة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين موجبان و حل سالب . لما $-m = \frac{6}{e^3}$ أي أن $m = -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة لما $-m > \frac{6}{e^3}$ أي ان $m < -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة فاصلتهما سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب .	