

متقن عبد السلام حسين عين وسارة
دورة: ماي 2018

وزارة التربية الوطنية
امتحان البكالوريا التجريبية
الشعبة: علوم تجريبية.

المدة: 3 سا و 30 دقيقة

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

- في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقطة $A(-2; 8; 4)$ والشعاع $\vec{u}(1; 5; -1)$
- عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) الذي يشمل A وشعاع توجيهه \vec{u} .
 - نعتبر المستويين (P) و (Q) المعرفين بمعادلتيهما على الترتيب: $(P): x - y - z = 7$ و $(Q): x - 2z = 11$.
أ) بين أن المستويين (P) و (Q) يتقاطعان في مستقيم (Δ) يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له.
ب) بين أن المستقيمين (d) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.
 - H و H' نقطتان من الفضاء حيث: $H(-3; 3; 5)$ و $H'(3; 0; -4)$.
أ) تحقق أن H تنتمي إلى (d) و H' تنتمي إلى (Δ) .
ب) برهن أن المستقيم (HH') عمودي على كل من المستقيمين (d) و (Δ) .
ج) احسب المسافة بين المستقيمين (d) و (Δ) .
 - عين مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MH'} = 126$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

- المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ؛ النقط A, B, C لآحقاتها:
 $z_A = -1 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ و $z_C = 2$ على الترتيب.
أ) بين أن النقط A, B, C تنتمي إلى دائرة (γ) يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها، ثم أنشئ النقط A, B, C .
ب) بين أن $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ثم استنتج أن B هي صورة A بدوران مركزه C يُطلب تعيين زاويته.
- (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحة z حيث $z = 2(-1 + e^{i\theta})$ مع $\theta \in \mathbb{R}$.
أ) بين أن (Γ) هي دائرة يُطلب تعيين مركزها ω ونصف قطرها.
ب) تحقق أن النقطتين A و B تنتميان إلى (Γ) .
- S التشابه المباشر الذي مركزه O ، نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $-\frac{\pi}{4}$.
أ) جد الكتابة المركبة للتشابه S .

ب) نسمي D صورة النقطة A بالتشابه S ؛ بين أن لآحة النقطة D هي: $z_D = (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)$

ج) اكتب z_A ثم z_D على الشكل الأسّي واستنتج القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos \frac{5\pi}{12}$ و $\sin \frac{5\pi}{12}$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $I = [0;1]$ بـ: $h(x) = 2x - x^2$.
- (1) أ) بين أن الدالة h متزايدة تماما على المجال I .
 ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I فإن $h(x)$ ينتمي إلى I .
- (2) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} بعدها الأول $u_0 = \frac{3}{7}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = h(u_n)$.
- أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$.
 ب) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة.
- (3) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} بـ: $v_n = 1 - u_n$.
- أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = v_n^2$.
 ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = v_0^{2^n}$.
 ج) استنتج u_n بدلالة n ؛ ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الرابع: (06 نقاط)

- (I) $g(x) = 1 + (1-x)e^{-x+2}$ الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ:
- (1) ادرس تغيرات الدالة g .
 (2) استنتج أنه، من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) \geq 0$.
- (II) $f(x) = x - 1 + xe^{-x+2}$ الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ:
- و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 ب) بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$ (حيث f' هي مشتقة الدالة f).
 ج) ادرس اتجاه تغير الدالة f على \mathbb{R} ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- (3) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$ ثم فسّر النتيجة هندسياً.
 ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى مستقيمه المقارب المائل (Δ) .
 ج) بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) يُطلب كتابة معادلة ديكارتية له.
- (4) أ) بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0,1 < \alpha < 0,2$.
 ب) احسب $f(-1)$ ثم ارسم (T) ، (Δ) و (C_f) .
- (5) m وسيط حقيقي، ناقش بيانها وحسب قيم m عدد حلول المعادلة: $xe^{-x+2} - 1 - m = 0$.
- (6) أ) بين أن الدالة $x \mapsto (-x-1)e^{-x+2}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x+2}$ على \mathbb{R} .
 ب) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما:
- $x = 2$ و $x = 3$.

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، A ، B ، C و D نقط من المستوي لاحقاتها

على الترتيب: $z_A = 1+i$ ، $z_B = -1+3i$ ، $z_C = -3+i$ و $z_D = 1+5i$.

(1) h التحاكي الذي نسبته 2 ويحول A إلى C ، عيّن z_Ω لاحقة النقطة Ω مركز التحاكي h .

(2) لتكن E مرجح الجملة $\{(A;1), (B;-1), (C;1)\}$ و I منتصف القطعة $[BC]$.

(أ) عيّن z_E و z_I لاحقتي النقطتين E و I على الترتيب .

(ب) عيّن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$.

(3) (أ) اكتب العدد المركب $\frac{z_I - z_A}{z_E - z_D}$ على الشكل الأسّي .

(ب) استنتج نسبة وزاوية التشابه S الذي يحول E إلى I ويحول D إلى A .

(4) K نقطة من المستوي تحقق : $z_K - z_D = -2e^{i\frac{\pi}{6}}(z_I - z_A)$.

أثبت أن K هي صورة النقطة E بدوران مركزه D يطلب تعيين زاوية له .

(5) عيّن مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث : $z - 1 - i = \frac{4}{z - 1 + i}$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_1 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right)u_n$.

(1) احسب u_2 ، u_3 و u_4 .

(2) (أ) بيّن أنه، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_n > 0$.

(ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة .

(ج) احسب نهاية المتتالية (u_n) .

(3) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نضع $v_n = \frac{u_n}{n}$.

(أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_1 .

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n = \frac{n}{2^n}$.

(4) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \ln(x) - x \ln 2$.

(أ) عيّن نهاية الدالة f عند $+\infty$. (ب) استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

كيس به خمس كريّات حمراء تحمل الأعداد 2، 2، 2، 2، 3 وأربع كريّات خضراء تحمل الأعداد 3، 3، 3، 3 ، -2 وكرة زرقاء تحمل العدد -1 .

نسحب من الكيس بطريقة عشوائية كرتين في آن واحد .

1) احسب احتمال الحصول على:

أ) كرتين من نفس اللون

ب) كرتين من لونين مختلفين

ج) كرتين تحملان عددين جداولهما سالب.

2) نعرّف من أجل كل سحبة من السحبات السابقة المتغير العشوائي X كما يلي:

. إذا سحبنا كرتين تحملان نفس العدد نرفق له العدد نفسه

. إذا سحبنا كرتين تحملان عددين مختلفين نرفق له العدد الأكبر

أ) عيّن قيم المتغير العشوائي X .

ب) عين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم احسب أمله الرياضياتي.

التمرين الرابع: (04 نقاط)

لتكن f دالة عددية معرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{2x}{x+1} - \ln(x+1)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.

2) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{1-x}{(x+1)^2}$

ب) ادرس اتجاه تعيّن الدالة f ، ثم شكل جدول تغيّراتها.

3) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

4) أ) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

ب) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $3,9 < \alpha < 4$.

ج) ارسم (T) والمنحنى (C_f) .

5) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x) = x - 3m$.

6) F دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ ب: $F(x) = (-3-x)\ln(x+1) + 3x$.

أ) بيّن أن F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$.

ب) لتكن $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما

$x = \alpha$ و $x = 0$

. بيّن أن: $A(\alpha) = 4 \left(\frac{\alpha^2 - 3\alpha}{\alpha + 1} \right) cm^2$ ثم أوجد حصر $A(\alpha)$.