ثانويّة شريّط لزهر – الحمّامات- تبسة- مجموعة الرياضيات لجزائرية2018

الإمتحان التدريبي الأول في مادة الرياضيات

المستوى: ثالثة علوم تجريبية المدّة: 3ساعات

على المترشح الإختيار بين التمرين الأول أو الثاني وحل جميع التمرينات المتبقية .

التّمرين الأول: (04 نقاط) اختياري

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس. نعتبر النّقط $A(1,2,0)$ ، $B(3,1,-1)$ و $C(2,4,-3)$.

الجزء الأول:

1) أثبت أنّ النقط A ، B و C تُعيّن مستوياً (P). ثم أكتُب معادلة ديكارتيّة للمستوي (P).

2) أكتُب تمثيلاً وسيطيّاً للمستقيم (Δ) الذي يشمل المبدأ و يُعامد المستوي (P).

3) لتكن $D(4,4,4)$ نقطة من الفضاء.

أ) تحقّق أنّ $D(4,4,4)$ تنتمي إلى (Δ).

ب) أحسُب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

ج) أحسُب قيمة تقريبيّة إلى 10^{-2} لقيس الزاوية BDC.

الجُزء الثّاني:

لتكن (Φ) مجموعة النّقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيثُ

$$\begin{cases} x = 1+2e^t \\ y = 1-3e^t \\ z = 1+e^t \end{cases}$$

حيثُ t عدد حقيقي و e أساس اللوغاريتم النيبيري. و ليكن (T) مستقيماً من الفضاء له التّمثيل الوسيطي

$$\begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$$ حيثُ λ عدد حقيقي.

1) عيّن طبيعة (Φ) و عناصرها المميّزة.

2) لتكن M نقطة كيفيّة من (Φ) و N نقطة كيفيّة من (T).

عيّن إحداثيات النّقطتين M و N بحيث تكون المسافة بين (Φ) و (T) أصغر ما يُمكن.

التّمرين الثاني: (04 نقاط) اختياري

صندوق يحتوي على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء و كل الكرات متماثلة و غير متمايزة عند اللمس.

نجري سلسلة من السحبات : في كل سحبة نأخذ عشوائيا كرة من الكيس ، إذا كانت سوداء نتوقف عن السحب و إذا كانت بيضاء لا نعيدها إلى الكيس و نسحب كرة أخرى و هكذا.

أخرى و نسجل لونها و ننهي التجربة.

1) أ) أحسب احتمال كل من الأحداث التالية :

A " الكرة المسحوبة في المرة الأولى سوداء ".

B " الكرة المسحوبة في المرة الثانية سوداء ".

ب) استنتج حساب الاحتمال لكي لا نجري السحبة الثالثة.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد السحبات التي أجريناها.

أ) أعط قانون الاحتمال المتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضياتي

ب) احسب التباين و الانحراف المعياري.

التمرين الثالث: (04 نقاط) إجباري

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المُعرّفة بـ: $u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 3}{3u_n + 4}$ و $u_0 = 3$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 1$.

2) أ- بين أن $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-3(u_n)^2 + 3}{3u_n + 4}$.

ب- بين أن (u_n) متناقصة ثم استنتج أنها متقاربة.

3) نعتبر المتتالية $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المُعرّفة بـ: $t_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أ- تحقق أن $1 - t_n = \dfrac{2}{u_n + 1}$ ثم استنتج أن $1 - t_n > 0$

ب- بين أن $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $\dfrac{1}{7}$ ثم عبر عن (t_n) بدلالة n و استنتج (u_n) بدلالة n

ج- عين $\lim\limits_{n\to+\infty}(t_n)$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$.

د- أحسب الجداء $P_n = t_0 \times t_1 \times .... \times t_n$

التّمرين الرابع: (05 نقاط) إجباري

1) نعتبر كثير الحدود $P(z)$ للمتغيّر المركّب z المعرّف بـ $P(z) = z^3 - 15z^2 + 81z - 175$.

أ) أحسُب $P(7)$ ثُمّ حلّل $P(z)$ إلى جداء عاملين.

ب) حل، في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$، المعادلة $P(z) = 0$.

2) المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. نعتبر النّقط A، B و C التي لواحقها $z_A = 4 - 3i$، $z_B = 4 + 3i$ و $z_C = 7$ على التّرتيب.

أ- علّم النّقط A، B و C.

ب- تحقّق أنّ $z_A - z_C = i\left(z_B - z_C\right)$.

ج) ما طبيعة المثلّث ABC؟

3) ليكن R الدّوران الذي مركزه النّقطة $\Omega(4)$ و يُحوّل النّقطة C إلى النّقطة B.

أ) أكتُب العبارة المركّبة للدّوران R.

ب) أوجد z_D لاحقة النّقطة D صورة النّقطة B بالدّوران R، ثُمّ علّمها.

ج) ما طبيعة الرّباعي $ACBD$؟

4) لتكن (Ψ) مجموعة النّقط M ، ذات اللاّحقة z ، من المستوي المركّب حيثُ يكون $\dfrac{z-z_B}{z-z_C}$ تخيّليّاً صرفاً جزؤه التّخيّلي موجب.

أ) حدّد طبيعة (Ψ).

ب) أنشئ (Γ) صورة (Ψ) بالدّوران R.

التّمرين الخامس:(07 نقاط) اجباري

I. الجدول التالي يمثل جدول تغيرات الدالة h المعرفة $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=x^3-x^2-x-1$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{22}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

1- أحسب $h(1.84)$ (تعطى النتيجة مدورة إلى 10^{-2})

2- استنتج اشارة $h(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x

II. لتكن g دالّة عدديّة مُعرّفة على المجال $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ $g(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}+\ln(x^2-1)$.

1) أحسُب نهايات الدّالّة g بجوار أطراف مجموعة تعريفها.

2) بين أنّه من أجل كل x من المجال $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ أن $g'(x)=\dfrac{2}{\left(x^2-1\right)^2}h(x)$.ثم استنتج اتجاه تغيُّر الدّالّة g ، ثُمّ شكّل جدول تغيُّراتها.

3) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-2.11<\alpha<-2.10$

4) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

III. لتكن f دالّة عدديّة مُعرّفة على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ بـ $f(x)=e^x\ln(x^2-1)$

و ليكن $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس للمستوي. (الوحدة على محور الفواصل $1cm$ وعلى محور التراتيب $6cm$)

1) أحسُب نهايات الدّالّة f بجوار أطراف مجموعة تعريفها. ثم فسر النتائج هندسيا .

2) أثبت أن $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغيُّر الدّالّة f ، ثُمّ شكّل جدول تغيُّراتها.

3) إثبت أن $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha e^{\alpha}}{1-\alpha^2}$. ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$

4) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين β و λ حيث $-1.42<\beta<-1.41$ و $1.41<\lambda<1.42$

5) أنشئ $\left(C_f\right)$

6) ناقش، بيانيّاً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة، ذات المجهول الحقيقي x، حيثُ
$$\ln(x^2-1)-e^{-x}(m-1)=0$$

زاايدي علاء الدين

الإجابة النموذجية

التّمرين الأوّل: (04 نقاط)

الجزء الأوّل:

1) لدينا $\overrightarrow{AB}(2,-1,-1)$ و $\overrightarrow{AC}(1,2,-3)$ وهما غير مرتبطان خطيّاً إذن النّقط A ، B و C ليست في إستقامية، إذن فهي تُعيّن مستوياً (P).

2) ليكن $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً لـ (P) إذن $\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 2a-b-c=0 \\ a+2b-3c=0 \end{cases}$ ومنه $a=c$، إذن بأخذ $a=1$ نجد أنّ $b=c=1$ ومنه $\vec{n}(1,1,1)$ ناظم لـ (P).

معادلة المستوي (P) من الشكل $x+y+z+d=0$، وبما أنّ $A\in(P)$ فإنّ $d=-3$، وعليه تكون $x+y+z-3=0$ معادلة ديكارتيّة للمستوي (P).

3) المستقيم (Δ) الذي يشمل المبدأ و يُعامد المستوي (P) هو مجموعة النّقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تُحقّق $\overrightarrow{OM}=t\vec{n}$ مع $t\in\mathbb{R}$ أي $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

4) أ) إحداثيات النّقطة D تُحقّق التّمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) (نجد أنّ $t=4$) ومنه $D\in(\Delta)$.

ب) لدينا $AB=\sqrt{6}$ ، $AC=BC=\sqrt{14}$، ومنه المثلّث ABC متقايس السّاقين رأسه C، لتكن H المسقط العمودي للنّقطة C على الضلع $[AB]$، حسب مبرهنة فيثاغورس نجد أنّ $HC=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$، وعليه تكون مساحة المثلّث ABC هي $S_{ABC}=\dfrac{AB\times HC}{2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

لدينا من جهة أخرى $d(D,(P))=3\sqrt{3}$ ومنه يكون حجم رباعي الوجوه $ABCD$ هو $V_{ABCD}=\dfrac{S_{ABC}\times d(D,(P))}{3}=\dfrac{15}{2}$.

ج) لدينا من جهة $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=DB\times DC\times\cos BDC$ حيثُ $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=-37$ و ومنه $\cos BDC=\dfrac{\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}}{DB\times DC}=0,85$ إذن $BDC=30,79^\circ$.

الجزء الثاني:

1) نضع $k=e^t$ إذن $k>0$ من أجل كل عدد حقيقي t، و منه $\begin{cases} x=1+2e^t \\ y=1-3e^t \\ z=1+e^t \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x=1+2k \\ y=1-3\boldsymbol{k}\ ,\boldsymbol{k}>0 \\ z=1+k \end{cases}$

و منه (Φ) هي نصف مستقيم مبدؤه $E(1,1,1)$ و $\vec{u}(2,-3,1)$ شعاع توجيه له.

2) بما أنّ $M\in(\Phi)$ و $N\in(\boldsymbol{T})$ فإنّ $M(1+2\boldsymbol{e^t},1-3\boldsymbol{e^t},1+\boldsymbol{e^t})$ و $N(2-\lambda,\lambda,1+\lambda)$.

حتى تكون المسافة بين (Φ) و (T) أصغر ما يُمكن يجب أن يكون $\begin{cases} \overrightarrow{MN}\cdot\vec{u}=0 \\ \overrightarrow{MN}\cdot\vec{v}=0 \end{cases}$

حيثُ $\vec{u}(2,-3,1)$ و $\vec{v}(-1,1,1)$ شعاعا توجيه لـ (Φ) و (T) على التّرتيب.

لـــدينا $\begin{cases} \overrightarrow{MN}\cdot\vec{u}=0 \\ \overrightarrow{MN}\cdot\vec{v}=0 \end{cases}$ تكـــافئ $\begin{cases} 3\lambda+4\boldsymbol{e^t}-2=0 \\ -4\lambda-14\boldsymbol{e^t}+5=0 \end{cases}$ يكـــافئ $\begin{cases} \lambda=\dfrac{4}{13} \\ t=\ln\left(\dfrac{7}{26}\right) \end{cases}$ و منـــه يكـــون لـــدينا

$M\left(\dfrac{20}{13},\dfrac{5}{26},\dfrac{33}{26}\right)$ و $N\left(\dfrac{22}{13},\dfrac{4}{13},\dfrac{17}{13}\right)$.

التّمرين الثاني: (04 نقاط) اختياري

1) أ) $P\ A=\dfrac{C_4^1}{C_7^1}=\boxed{\dfrac{4}{7}}$

لكي يتحقق الحدث يجب :

أن نسحب في المرة الأولى كرة بيضاء و لا تعاد إلى الكيس **و** نسحب في المرة الثانية كرة سوداء

إذن : $P\ B=\dfrac{C_3^1}{C_7^1}\times\dfrac{C_4^1}{C_6^1}=\boxed{\dfrac{2}{7}}$

ب) لكي لا نجري السحبة الثانية يجب أن نتوقف إما عند السحبة الأولى **أو** عند السحبة الثانية

أي : " نسحب كرة سوداء في المرة الأولى **أو** نسحب كرة سوداء في المرة الثانية ".

إذن الاحتمال لكي لا نجري السحبة الثالثة هو : $\boldsymbol{P\ A}+P\ B=\dfrac{4}{7}+\dfrac{2}{7}=\boxed{\dfrac{6}{7}}$

2) القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي : 1 و 2 و 3 و 4.

- يتحقق الحدث $X=1$ إذا سحبنا في المرة الأولى كرة سوداء : $P\ X=1\ =\boldsymbol{P\ A}=\boxed{\dfrac{4}{7}}$

- يتحقق الحدث $X=2$ إذا سحبنا في المرة الأولى كرة بيضاء و لم نعدها إلى الكيس ثم سحبنا كرة سوداء

إذن : $P\ X=2\ =\boldsymbol{P\ B}=\boxed{\dfrac{2}{7}}$

- يتحقق الحدث $X=3$ إذا سحبنا في المرة الأولى كرة بيضاء و لم نعدها إلى الكيس ثم سحبنا

في المرة الثانية كرة بيضاء و لم نعدها إلى الكيس ثم سحبنا في المرة الثالثة كرة سوداء.

إذن : $P\left(X=3\right)=\frac{C_3^1}{C_7^1}\times\frac{C_2^1}{C_6^1}\times\frac{C_4^1}{C_5^1}=\boxed{\frac{4}{35}}$

- يتحقق الحدث $X=4$ إذا سحبنا في المرة الأولى كرة بيضاء و لم نعدها إلى الكيس ثم سحبنا في المرة الثانية كرة بيضاء و لم نعدها إلى الكيس ثم سحبنا في المرة الثالثة كرة بيضاء و لم نعدها إلى الكيس ثم سحبنا في المرة الرابعة كرة سوداء

إذن :

$$P\left(X=4\right)=\frac{C_3^1}{C_7^1}\times\frac{C_2^1}{C_6^1}\times\frac{C_1^1}{C_5^1}\times\frac{C_4^1}{C_4^1}=\boxed{\frac{1}{35}}$$

- نلخص النتائج في الجدول التالي :

X_i	1	2	3	4
$P\left(X=x_i\right)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{35}$

✓ - الأمل الرياضياتي $E(X)$:

$$E\left(X\right)=1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{4}{7}+3\times\frac{4}{35}+4\times\frac{1}{35}=\boxed{\frac{76}{35}}$$

✓ التباين $V(X)$:

$$V\left(X\right)=E\left(X^2\right)-\left(\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{X}\right)\right)^2=\left(1\times\frac{4}{7}+4\times\frac{2}{7}+9\times\frac{4}{35}+16\times\frac{1}{35}\right)-\left(\frac{76}{35}\right)^2=\frac{112}{35}-\frac{5776}{1225}=\frac{1506}{1225}$$

✓ الانحراف المعياري $\sigma(X)$:

$\sigma\left(X\right)=\sqrt{V\left(X\right)}\approx 3{,}50$.

التّمرين الثالث: (04 نقاط) لجباري

المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المُعرّفة بـ: $u_{n+1}=\frac{4u_n+3}{3u_n+4}$ و. $u_0=3$

1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n>1$.

الشرط الأوّل

لنتأكد من صحة $P(0)$ لدينا $u_0=3$ تكافئ : $u_0>1$ ومنه $P(0)$ صحيحة.

الشرط الثاني

لنفرض أنّ $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1}>1$

حسب فرضية التراجع $u_n>1$ نلاحظ أن $u_{n+1}=\frac{4u_n+3}{3u_n+4}=f(u_n)$

تكافئ: $f(u_n) > f(1)$ و تكافئ $u_{n+1} > 1$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة $P(n)$ و منه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه ن أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 1$.

4) أ- من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} - u_n = \frac{4u_n + 3 - 3(u_n)^2 - 4u_n}{3u_n + 4} = \frac{-3(u_n)^2 + 3}{3u_n + 4}.$$

ب- بين أن (u_n) متناقصة ثم استنتج أنها متقاربة

من البرهان بالتراجع لدينا $u_n > 1$ ومن جهة أخرى $3u_n + 4 > 0$ فالإشارة من إشارة البسط , أي أن $-3(u_n)^2 + 3 = 0$ تكافئ $u_n = 1$ أو $u_n = -1$ ومن جهة أخرى $u_n > 1$ أي أن (u_n) متناقصة.

بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو 1 .

3) $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المُعرّفة بـ: $t_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أ- التحقق أن $1 - t_n = \frac{2}{u_n + 1}$: من أجل كل عدد طبيعي n .

$$1 - t_n = 1 - \frac{u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{u_n + 1 - u_n + 1}{u_n + 1} = \frac{2}{u_n + 1}$$

الاستنتاج أن $1 - t_n > 0$ من البرهان بالتراجع لدينا $u_n > 1$ تكافئ $u_n + 1 > 0$ تكافئ

$$\frac{2}{u_n + 1} > 0$$

ب- $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $\frac{1}{7}$ معناه أن $t_{n+1} = \frac{1}{7} t_n$

لدينا $t_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ تكافئ

$$t_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} - 1}{\frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} + 1} = \frac{\frac{4u_n + 3 - 3u_n - 4}{3u_n + 4}}{\frac{4u_n + 3 + 3u_n + 4}{3u_n + 4}} = \frac{u_n - 1}{7u_n + 7} = \frac{1}{7}\left(\frac{u_n - 1}{u_n + 1}\right) = \frac{1}{7} t_n$$

ومنه (t_n) هندسية أساسها $\frac{1}{7}$ و حدها الأول $t_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{1}{2}$

عبارة t_n بدلالة n : $t_n = t_0 \times q^n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\right)^n$

عبـــارة u_n بدلالـــة n : لـــدينا $t_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ تكـــافئ $t_n(u_n + 1) = u_n - 1$ تكـــافئ

$t_n(u_n + 1) - u_n + 1 = 0$ تكـــافئ $t_n u_n + t_n - u_n + 1 = 0$ تكـــافئ $u_n(t_n - 1) + t + 1 = 0$ تكـــافئ

$$u_n = \frac{t_n + 1}{-t_n + 1} \text{ تكافئ } u_n = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\right)^n + 1}{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\right)^n + 1}$$

ج- $\lim\limits_{n\to+\infty}(t_n)=0$ لأن $-1<q<1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=1$.

د- حساب الجداء $(1-(\frac{1}{7})^{n+1})\frac{7}{12}=(\frac{1-(\frac{1}{7})^{n+1}}{1-\frac{1}{7}})\frac{1}{2}=(\frac{1-q^{n+1}}{1-q})t_0=P_n=t_0\times t_1\times.......\times t_n$

$$P_n=t_0\times t_1\times.......\times t_n=t_0(\frac{1-q^{n+1}}{1-q})=\frac{1}{2}(\frac{1-(\frac{1}{7})^{n+1}}{1-\frac{1}{7}})=\frac{7}{12}(1-(\frac{1}{7})^{n+1})$$

التّمرين الرابع: (05 نقاط) لجباري

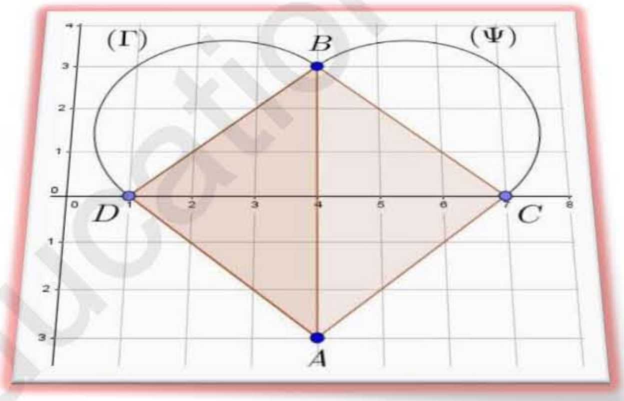
1) أ) لدينا $P(7)=0$ ، باستخدام خوارزميّة القسمة الإقليدية نجد أنّ $P(z)=(z-7)(z^2-8z+25)$.

ب) لدينا $P(z)=0$ يكافئ $(z-7)(z^2-8z+25)=0$ يكافئ $\begin{cases} z-7=0..............(1) \\ z^2-8z+25=0....(2) \end{cases}$

من المعادلة (1) نجد أنّ $z=7$.

المعادلة (2) من الدّرجة الثانية، نحلّها باستخدام المميّز Δ حيثُ $\Delta=-36$، إذن فهي تقبل حلّين مترافقين هما $z_1=\frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=4-3i$ و $z_2=\frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=4+3i$، و عليه مجموعة حلول المعادلة $P(z)=0$ هي $S=\{1,4-3i,4+3i\}$.

2) أ) التّعليم موضّح في الرّسم المرفق.



ب) لدينا من جهة $z_A-z_C=-3-3i$ و من جهة أخرى $-i(z_B-z_C)=-3-3i$ إذن $z_A-z_C=-i(z_B-z_C)$.

ج) لدينا $z_A-z_C=i(z_B-z_C)$ و منه $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=i$، كذلك لدينا $\left|\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right|=|i|=1$ أي أنّ $AC=BC$، كذلك لدينا $\arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$، و منه $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$،، و عليه يكون المثلّث ABC قائم في C و متقايس السّاقين.

3) أ) العبارة المركّبة للدّوران R من الشكل $z'=az+b$.

لدينا $\begin{cases} z_\Omega = az_\Omega + b....(1) \\ z_B = az_C + b....(2) \end{cases}$، بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2) نحصل على $z_B - z_\Omega = a\left(z_C - z_\Omega\right)$ و

منه $a = i$ إذن $b = 4 - 4i$، و عليه العبارة المركّبة للدّوران R هي $z' = iz + 4 - 4i$.

ب) لدينا $z_D = iz_B + 4 - 4i$ و منه $z_D = 7$.

ج) المثلّث ABC قائم في C و متقايس السّاقين و $z_D - z_B = z_A - z_C$ أي $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA}$ إذن الرّباعي $ACBD$ مربّع.

4) أ) العدد $\dfrac{z - z_B}{z - z_C}$ تخيّلي صرف جزؤه التّخيّلي موجب يعني أنّ $\arg\left(\dfrac{z - z_B}{z - z_C}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ أي أنّ

$\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$، و عليه (Ψ) هي نصف دائرة قطرها $\left[BC\right]$ باستثناء النّقطتين B و C و الزّاوية

MBC موجّهة في الاتجاه الموجب.

التّمرين الخامس: (07 نقاط) لجباري

I. الجزء الأول:

1- لدينا $h(1.84) = 0$ (النتيجة مدورة إلى 10^{-2})

2- اشارة $h(x)$ موضحة في الجدول

x	$-\infty$	$1,84$	$+\infty$
$h(x)$	$-$	0	$+$

II. الجزء الثاني:

لتكن g دالّة عدديّة مُعرّفة على المجال $\left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$ $g(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1} + \ln(x^2 - 1)$.

1) حساب نهايات الدّالّة g بجوار أطراف مجموعة تعريفها.

نهاية الدّالّة g بجوار $-\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x^2 - 1} + \ln(x^2 - 1) = +\infty$

نهاية الدّالّة g بجوار $+\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x^2 - 1} + \ln(x^2 - 1) = +\infty$

نهاية الدّالّة g بجوار -1 $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} g(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} \dfrac{2x + (x^2 - 1)\ln(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = -\infty$

نهاية الدّالّة g بجوار 1 $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} g(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \dfrac{2x + (x^2 - 1)\ln(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = +\infty$

5) الدّالّة g قابلة للإشتقاق على $\left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$ ودالّتها المشتقّة

$$g'(x) = \frac{2\left(x^2 - 1\right) - 2x(2x)}{\left(x^2 - 1\right)^2} + \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{2\left(x^3 - x^2 - x - 1\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{2}{\left(x^2 - 1\right)^2} h(x).$$

و بما ان $\frac{2}{{x^2-1}^2} > 0$ من أجل كل x من المجال $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ فإن إشارة $g'(x)$ من إشارة $h(x)$.ومنه الدّالّة g متزايدة تماماً على $]1,82;+\infty[$ و متناقصة تماماً على $]-\infty;-1[\cup]1,;1,82[$. وجدول تغيُّراتها هو :

x	$-\infty$		-1		1		$1,82$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		//////		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$	//////	$+\infty$	$\searrow$	$2,91$	$\nearrow$	$+\infty$

3) الدّالّة g مستمرّة و رتيبة تماماً متناقصة تماما على المجال $]-2,11;-2,10[$، و لدينا $g(-2,11)\times g(-2,10)<0$، و منه حسب مبرهنة القيم المتوسّطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α، حيثُ $-2,11<\alpha<-2,10$.

4) إشارة $g(x)$ مُوضّحة في الجدول.

x	$-\infty$		α		-1		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$		//////		$+$	

III. لتكن f دالّة عدديّة مُعرّفة على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ بـ $f(x)=e^x\ln(x^2-1)$

1) حساب نهايات الدّالّة f بجوار أطراف مجموعة تعريفها. و تفسير النتائج هندسيا.

نهاية الدّالّة f بجوار $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^x\ln(x^2-1)=\lim_{x\to-\infty}(x^2-1)e^x\times\frac{\ln(x^2-1)}{(x^2-1)}=0$$

المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مستقيم مقارب أفقي للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$.

نهايةالدّالّة f بجوار $+\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^x\ln(x^2-1)=+\infty$

نهاية الدّالّة f بجوار -1 $\lim_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}-1} e^x\ln(x^2-1)=-\infty$

المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مستقيم مقارب عمودي للمنحني (C_f) .

نهاية الدّالّة f بجوار 1 $\lim_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}1} e^x\ln(x^2-1)=-\infty$

المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مستقيم مقارب عمودي للمنحني (C_f) .

2) الدّالّة g قابلة للإشتقاق على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ ودالّتها المشتقّة $f'(x)=g(x)\times e^x$ و بما ان $e^x>0$ من أجل كل x من المجال $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.ومنه الدّالّة f متزايدة تماماً على $]-\infty;\alpha[\cup]1;+\infty[$ و متناقصة تماماً على $]\alpha;-1[$. وجدول تغيُّراتها هو

x	-2		α		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$				$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$		$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) لدينا $g(\alpha)=0$ ومنه $\ln(\alpha^2-1)=-\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}$ ومنه إثبت أن $f(\alpha)=e^{\alpha}\ln(\alpha^2-1)=\frac{2\alpha e^{\alpha}}{1-\alpha^2}$

حصرا لـ $f(\alpha)$ لدينا $-2,11<\alpha<-2,10$ ومنه $-4,22<2\alpha<-4,20$ وكذلك $0,121<e^{\alpha}<0,122$ وكذلك $-0,508<2\alpha e^{\alpha}<-0,514$ ومن جهة أخرى $4,41<\alpha^2<4,45$ ومنه $-3,45<1-\alpha^2<-3,41$ ومنه $\frac{1}{-3,41}<\frac{1}{1-\alpha^2}<\frac{1}{-3,45}$

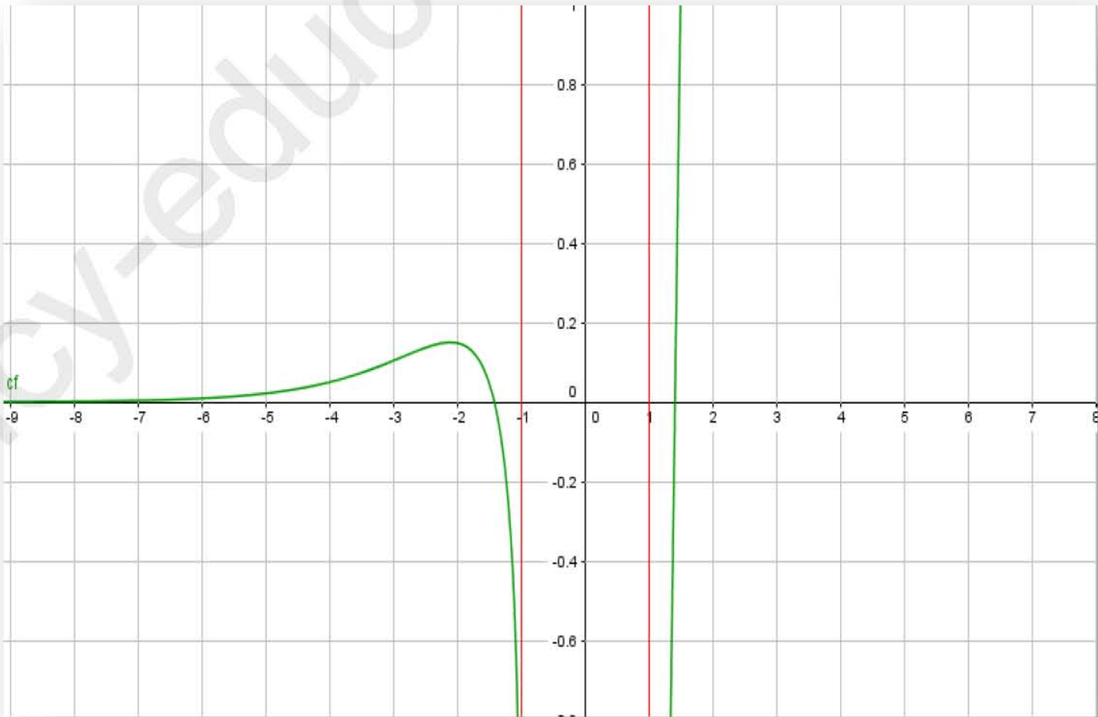
$0,146<f(\alpha)<0.151$

4) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين β و λ حيث $-1.42<\beta<-1.41$ و $1.41<\lambda<1.42$

الدّالّة f مستمرّة و رتيبة تماماً متناقصة تماما على المجال $]-1,42;-1,41[$ ، و لدينا $f(-1,41)\times f(-1,42)<0$ ، و منه حسب مبرهنة القيم المتوسّطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β ، حيثُ $-1.42<\beta<-1.41$.

5) الدّالّة f مستمرّة و رتيبة تماماً متزايدة تماما على المجال $]1,41;1,42[$ ، و لدينا $f(1,41)\times f(1,42)<0$ ، و منه حسب مبرهنة القيم المتوسّطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا λ ، حيثُ $1.41<\lambda<1.42$.

5) أنشئ (C_f)



6) المناقشة بيانيًا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة، ذات المجهول الحقيقي x، حيث
$\ln(x^2-1)-e^{-x}(m-1)=0$ يكافئ $\ln(x^2-1)=e^{-x}(m-1)$ يكافئ
$e^x\times\ln(x^2-1)=e^x\times e^{-x}(m-1)$ يكافئ $e^x\ln(x^2-1)=(m-1)$ يكافئ
$f(x)=(m-1)$ ، مناقشة أفقية هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم المتحرك الأفقي ذو المعادلة
$y=m-1$

- $m-1<0$ تكافئ $m<1$ حلين مختلفين أحدهما موجب و الأخر سالب
- $m-1=0$ تكافئ $m=1$ حلين مختلفين أحدهما β و الأخر λ .
- $0<m-1<f(\alpha)$ تكافئ $1<m<f(\alpha)+1$ حلين سالبين وحل موجب .
- $m-1=f(\alpha)$ تكافئ $m=f(\alpha)+1$ حل مضاعف سالب وحل موجب.
- $m-1>f(\alpha)$ تكافئ $m>f(\alpha)+1$ حل موجب.

بالتوفيق في شهادة البكالوريا 2018

زايدي علاء الدين

مجموعة الرياضيات الجزائرية

الإمتحان التدريبي الثاني في مادة الرياضيات

المستوى: ثالثة علوم تجريبية المدّة: 3ساعات

على المترشح الإختيار بين التمرين الأول أو الثاني وحل جميع التمرينات المتبقية

التّمرين الأول:(04 نقاط) اختياري

يحتوي صندوق على 10 كرات منها 5 كرات حمراء و 3 كرات خضراء و كريتان بيضاء، نسحب عشوائيا وفي آن واحد أربعة كرات من الصندوق.

5) أحسُب عدد الحالات الممكنة

6) احسب الاحتمالات التالية:

أ) ثلاث كرات من نفس اللون

ب) كرة على الأقل بيضاء

ت) كرتين على الأكثر خضراء.

7) نعتبر الحدث A : "من بين الكرات الأربعة المسحوبة توجد كرة بيضاء واحدة فقط"

نعتبر الحدث B : "من بين الكرات الأربعة المسحوبة توجد بالضبط ثلاث كرات من نفس اللون "

بين أن $p(A)=\frac{8}{15}$ و أن $p(\boldsymbol{B})=\frac{19}{70}$.

8) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات البيضاء المسحوبة .

أ) عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون الإحتمال له.

ب) أحسب الأمل الرياضياتي و التباين والإنحراف المعياري.

التّمرين الثاني:(04 نقاط) اختياري

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل :

1) المستقيم الذي تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x=t+2 \\ y=-2t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=3t-1 \end{cases}$ يوازي المستقيم الذي معادلته الديكارتية $x+2y+z-3=0$.

2) المستويات $(P):x-2y+3z=3$ و $(P'):2x+3y-2z=6$ و $(P''):4x-y+4z=12$ لا تتقاطع في أي نقطة.

3) نعتبر النقط $A(-1,0,2)$ ، $B(1,4,0)$ و $A(3,-4,-2)$ المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي $x+z=1$

4) نعتبر النقط $A(-1,1,3)$ ، $B(2,1,0)$ و $A(4,-1,5)$ النقطة C مرجح النقطتين A و B .

التّمرين الثالث: (04 نقاط) اجباري

لتكن h دالّة عدديّة مُعرّفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ $h(x)=\frac{4x-1}{x+2}$. و ليكن (C_h) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس للمستوي. (أنظر الملحق) و ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$

1) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المُعرّفة بـ: $u_{n+1}=\frac{4u_n-1}{u_n+2}$ و $u_0=5$

أ- مثل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 على حامل محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط الرسم

ب- أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية وتقاربها (u_n)

2) أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 1$.

ب-أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n)

3) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المُعرّفة بـ: $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$

ه- بين أن (v_n) حسابية يطلب تعين أساسها وحدها الأول .

و- عبر عن (v_n) بدلالة n ثم استنتج (u_n) بدلالة n . عين $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$.

4) أحسب الجداء $P_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times e^{v_2} \times ...... \times e^{v_n}$

التّمرين الرابع: (05 نقاط) اجباري

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$

1) لتكن النقطة M' ذات اللاحقة z' صورة النقطة M ذات اللاحقة z بالدوران R الذي مركزه Ω ذات اللاحقة z_w و زاويته θ بحيث $\Omega M = \Omega M'$ و $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta + 2k\pi$ و $k \in \mathbb{Z}$.

أ- عين طويلة وعمدة العدد المركب $\dfrac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega}$

ب- أكتب z' بدلالة z و θ و z_w .

2) حل، في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$، المعادلة $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$

3) نعتبر النّقط A ، B التي لواحقها $z_A = 2\sqrt{3} - 2i$ ، $z_B = 2\sqrt{3} + 2i$ على التّرتيب.

أ- أكتب z_A و z_B على الشكل الأسي

ب- بين أن المثلث OAB متقايس الأضلاع

4) لتكن النقطة C ذات اللاحقة $z_C = -8i$ والنقطة D صورة النقطة C بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\dfrac{2\pi}{3}$.

ج- علّم النّقط A ، B ، C و D .

د- تحقق أن لاحقة النقطة D هي $z_D = 4\sqrt{3} + 4i$

ه- بين أن النقطة D صورة النقطة B بالتحاكي الذي مركزه O ثم بين أن المثلث OAD قائم في A

التّمرين الخامس: (07 نقاط) اجباري

I. لتكن g دالّة عدديّة مُعرّفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ $g(x) = e + \dfrac{\ln x}{x}$. و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس للمستوي. $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1- أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

2- حل في المجال $]0, +\infty[$ المعادلة $g(x) = e$

3- أحسب $g\left(\dfrac{1}{e}\right)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $]0, +\infty[$

I. نعتبر f الدالـة العدديـة المُعرّفة على $]0,+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{1}{2}(\ln \boldsymbol{x})^2+ex+e$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس للمستوي.

3) أُحسُب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ فسِّر هندسياً النّتائج.

4) أ- بين أنّه من أجل كل x من المجال $]0,+\infty[$ أن $f'(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$.

ب - استنتج اتجاه تغيُّر الدّالّة f ، ثُمّ شكّل جدول تغيُّراتها.

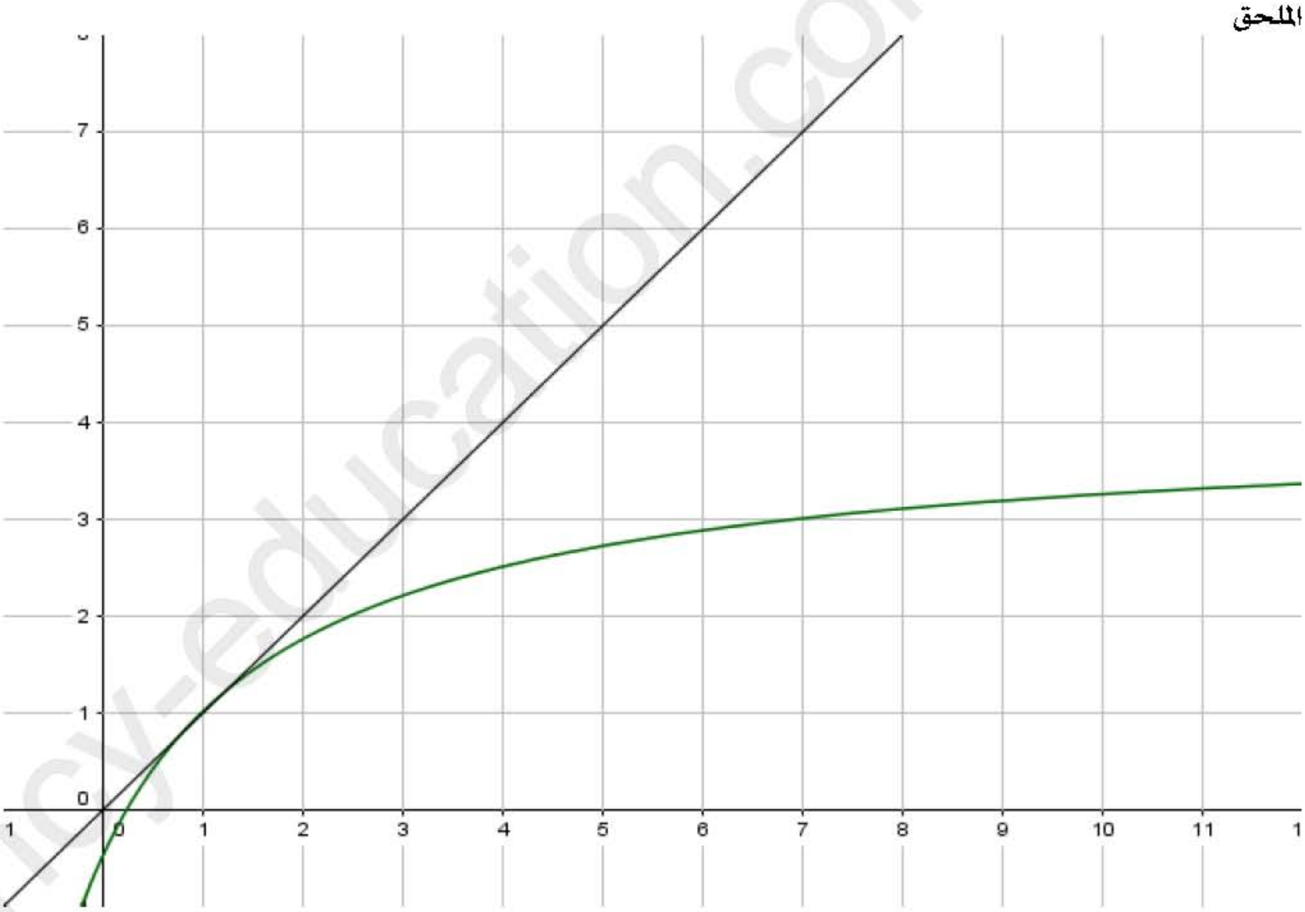
5) عين معدلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة 1 . ثم أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

6) أنشئ Δ و (C_f).

7) ناقش، بيانيّاً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة، ذات المجهول الحقيقي x، حيثُ $(\ln x)^2-2\boldsymbol{x}(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{e})=0$

زايدي علاء الدين

الملحق



بالتوفيق في شهادة البكالوريا 2018

الإجابة النموذجية

التّمرين الأول: (04 نقاط)

1- الحالات اللمكنة لسحب 4 كرات في أن واحد هي : $C_{10}^{4}=\frac{10!}{4!\ 10-4\ !}=210$

2- -أ- D حادثة الحصول على " ثلاث كرات من نفس اللون " معناه 3 كرات حمراء وكرة لون اخر أو 3 كرات خضراء وكرة لون اخر

$$P(D)=\frac{C_5^3\times C_5^1+C_3^3\times C_7^1}{210}=\frac{1\times 7+10\times 5}{210}=\frac{57}{210}=\frac{19}{70}$$

E حادثة الحصول على " كرة على الأقل بيضاء " معناه كرة بيضاء و 3 كرات لون اخر أو كرتين بيضاء و كرتين لون اخر $P(E)=\frac{C_2^1\times C_8^3+C_2^2\times C_8^2}{56}=$

F حادثة الحصول على " كرتين على الأكثر خضراء " معناه كرتين خضراء و كرتين لون اخر أو كرة خضراء وثلاث كرات لون اخر أو 4 كرات لون اخر.= $P(F)=\frac{C_3^2\times C_7^2+C_3^1\times C_7^3+C_3^0\times C_7^4}{56}$

3- نعتبر الحدث A : "من بين الكرات الأربعة المسحوبة توجد كرة بيضاء واحدة فقط"

معناه كرة بيضاء واحدة و ثلاث كرات لون اخر $p(A)=\frac{C_8^3\times C_2^1}{210}=\frac{112}{210}=\frac{8}{15}$

نعتبر الحدث B : "من بين الكرات الأربعة المسحوبة توجد بالضبط ثلاث كرات من نفس اللون "

معناه 3 كرات حمراء وكرة لون اخر أو 3 كرات خضراء وكرة لون اخر

$p(B)=p(D)=\frac{19}{70}$.

4- تعيين قيم X : $X=\ 0,1;2$

$P(X=0)=\frac{C_8^4}{210}=\frac{1}{3}$ في حالة سحب 4 كرات غير بيضاء

$P\ X=1\ =P(A)=\frac{8}{15}$ في حالة سحب كرة بيضاء و 3 كرات غير بيضاء

استنتاج : $P\ X=2\ =\ ?$ أو يمكن حسابها بنفس الطريقة السابقة أي كرتين بيضاء و كرتين ليست بيضاء

لدينا : $P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$

$$P(X=2)=1-(P(X=1)+P(X=3))$$

$$P(X=2)=\frac{2}{15}$$

X_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

ج -حساب الأمل الرياضي و التباين والانحراف المعياري :

$$E(X)=\left(0\times\frac{1}{3}\right)+\left(1\times\frac{8}{15}\right)+\left(2\times\frac{1}{15}\right)=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$$

ت-حساب التباين والانحراف المعياري :

$$v(X)=\sum_{i=1}^{3}(X_i-E(X))^2\times P_i=\frac{96}{225}$$

الانحراف المعياري : $\delta=\sqrt{V(X)}=0,65$

التّمرين الثاني:(04 نقاط) اختياري

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل :

1) المستقيم الذي تمثيله الوسيطي $\begin{cases}x=t+2\\y=-2t \quad t\in\mathbb{R}\\z=3t-1\end{cases}$ يوازي المستوي الذي معادلته الديكارتية $x+2y+z-3=0$. صحيح لأن شعاع توجيه المستقيم (D) و الشعاع الناظم للمستوي (P) متعامدان $\vec{n}.\vec{u}=0$ ومنه المستقيم (D) يوازي المستوي (P)

2) المستويات $(P):x-2y+3z=3$ و $(P'):2x+3y-2z=6$ و $(P''):4x-y+4z=12$ لا تتقاطع في أي نقطة. خطأ لأن الشعاع $\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ الناظم للمستوي (P_1) و الشعاع $\vec{n_2}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$ الناظم للمستوي (P_2) . أي أن الشعاعان $\vec{n_1}$ و $\vec{n_1}$ غير مرتبطين خطيا إذن المستويين (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم (D) تمثيله الوسيطي $\begin{cases}x=t\\y=-\frac{8}{5}t+\frac{24}{5} \quad t\in\mathbb{R}\\z=-\frac{7}{5}t+\frac{21}{5}\end{cases}$ و بتعويض القيم في معادلة (P_3) نجد أنها محققة و بالتالي المستويات الثلاث متقاطعة وفق مستقيم (D).

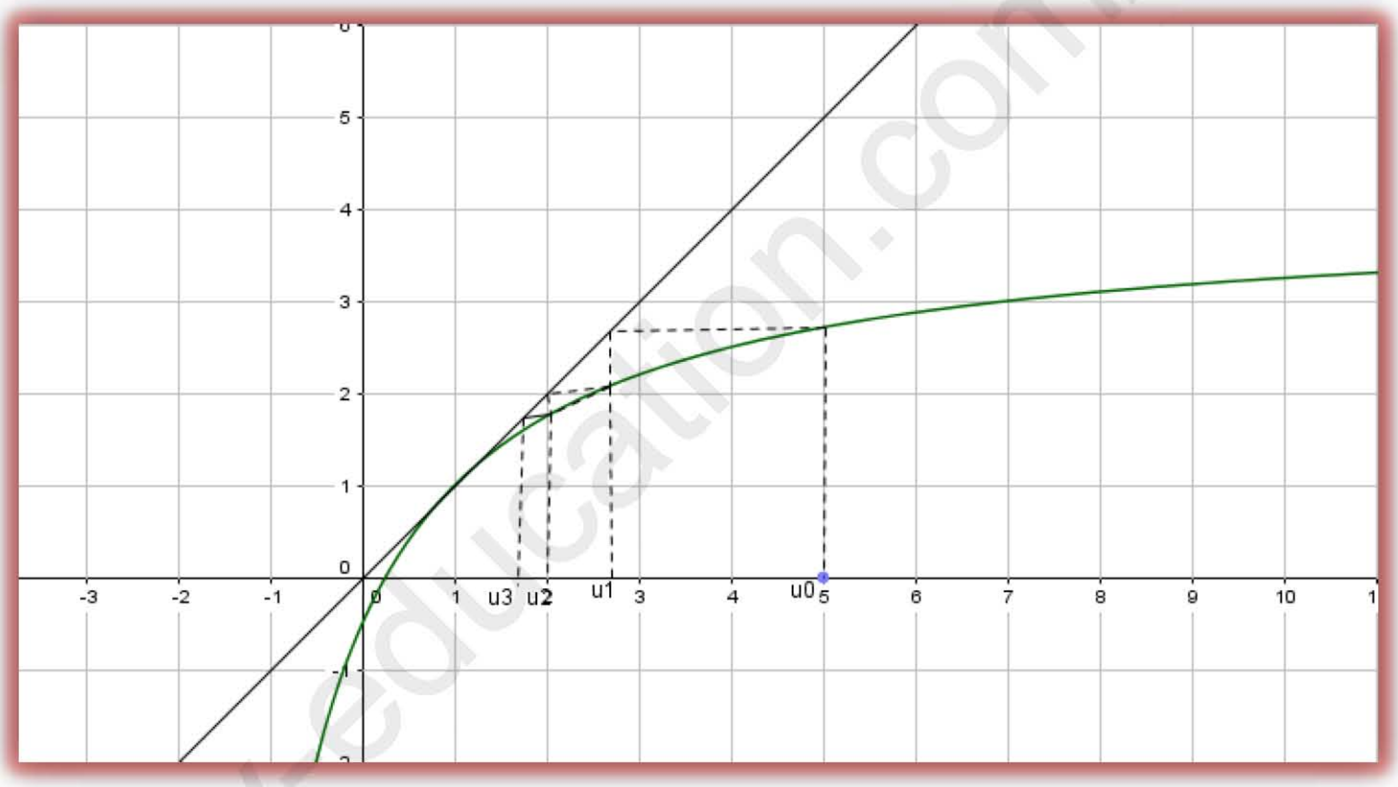
3) نعتبر النقط $A(-1,0,2)$ ، $B(1,4,0)$ و $A(3,-4,-2)$ المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي $x+z=1$ صحيح لأن الشعاعين $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-4\\-4\end{pmatrix}$ غير مرتبطين خطيا و عليه النقط تشكل مستويا (ABC) و بتعويض احداثياتها في المعادلة نجدها محققة.

4) نعتبر النقط $A(-1,1,3)$ ، $B(2,1,0)$ و $A(4,-1,5)$ النقطة C مرجح النقطتين A و B .

خطأ لأن الشعاعين $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\-2\\2\end{pmatrix}$ غير مرتبطين خطيا و عليه النّقط A و B ليست في إستقاميّة، إذن لا يمكن للنقطة C أن تكون مرجح النقطتين A و B .

التّمرين الثالث: (04 نقاط) اجباري

-1 أ- تمثيل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 على حامل محور الفواصل



ب- التخمين $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ إذن من الواضح أن المتتالية u_n متناقصة تماما

بما أن المتتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو نقطة تقاطع .

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المُعرّفة بـ: $u_{n+1}=\dfrac{4u_n-1}{u_n+2}$ و $u_0=5$

5) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 1$.

الشرط الأوّل

لنتأكد من صحة $P(0)$ لدينا $u_0=5$ تكافئ : $u_0 > 1$ ومنه $P(0)$ صحيحة.

الشرط الثاني

لنفرض أنّ $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1}>1$

حسب فرضية التراجع $u_n>1$ نلاحظ أن $f(u_n)$ $u_{n+1}=\frac{4u_n-1}{u_n+2}=f(u_n)$

تكافئ: $f(u_n)>f(1)$ و تكافئ $u_{n+1}>1$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة $P(n)$ و منه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه ن أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n>1$.

ب- أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n)

$$u_{n+1}-u_n=\frac{4u_n-1}{u_n+2}-u_n=\frac{4u_n-1-(u_n)^2-2u_n}{u_n+2}=\frac{-(u_n)^2+2u_n-1}{u_n+2}$$

نلاحظ أن $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-1)^2}{u_n+2}<0$ المتتالية u_n متناقصة تماما.

3) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المُعرّفة ب: $v_n=\frac{1}{u_n-1}$

أ- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حسابية معناه أن $v_{n+1}-v_n=r$

لدينا $v_n=\frac{1}{u_n-1}$ تكافئ $v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}-1}=\frac{1}{\frac{4u_n-1}{u_n+2}-1}=\frac{1}{\frac{4u_n-1-u_n-2}{3u_n+4}}=\frac{u_n+2}{3u_n-3}$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{3u_n+2}{3u_n-3}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{u_n+2-3}{3u_n-3}=\frac{1}{3}\left(\frac{u_n-1}{u_n-1}\right)=\frac{1}{3}$$

ومنه (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=\frac{1}{u_0-1}=\frac{1}{4}$

ب- عبارة v_n بدلالة n : $v_n=v_0+nr=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{7}\right)n$

استنتج (u_n) بدلالة n لدينا : $v_n=\frac{1}{u_n-1}$ تكافئ $v_n(u_n-1)=1$ تكافئ

$$u_n=\frac{1+v_n}{v_n}=\frac{1}{v_n}+1=\frac{1}{\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{7}\right)n}+1=\frac{28}{4n+7}+1$$

تعين $\lim_{n\to+\infty}(v_n)=+\infty$ و $\lim_{n\to+\infty}(u_n)=1$.

4) حساب الجداء $P_n=e^{v_0}\times e^{v_1}\times e^{v_2}\times......\times e^{v_n}=e^{v_0+v_1+....+v_n}=e^{\frac{(n+1)}{2}(v_0+v_n)}$

التّمرين الرابع: (05 نقاط) لجباري

1) أ- بما أن $\Omega M=\Omega M'$ فإن $\left|z'-z_{\Omega}\right|=\left|z-z_{\Omega}\right|$ ومنه $\left|\dfrac{z'-z_{\Omega}}{z-z_{\Omega}}\right|=1$

كذلك $\arg\left(\dfrac{z'-z_{\Omega}}{z-z_{\Omega}}\right)=\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)=\theta+2k\pi$

ب- لدينا $\dfrac{z'-z_{\Omega}}{z-z_{\Omega}}=\left|\dfrac{z'-z_{\Omega}}{z-z_{\Omega}}\right|e^{i\theta}$ ومنه $\dfrac{z'-z_{\Omega}}{z-z_{\Omega}}=e^{i\theta}$ ومنه $z'=e^{i\theta}z+\ 1-e^{i\theta}\ \ z_{\Omega}$

2) أ) المعادلة من الدّرجة الثانية، تحلّها باستخدام المميّز Δ حيثُ $\Delta=-16=16i^2$، إذن فهي تقبل حلّين مترافقين هما $z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=2\sqrt{3}-2i$ و $z_2=\dfrac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=2\sqrt{3}+2i$، و عليه مجموعة حلول المعادلة هي $S=\left\{2\sqrt{3}-2i,2\sqrt{3}+2i\right\}$

3) أ) لدينا $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=4$ ومنه الشكل الأسي للعدد z_A هو $z_A=4e^{\frac{\pi}{6}i}$ و بما أن $z_A=\overline{z_B}$ فإن $z_B=4e^{-\frac{\pi}{6}i}$.

ب) لدينا $\dfrac{z_A-z_O}{z_B-z_0}=e^{\frac{\pi}{3}i}$ و عليه يكون المثلّث OAB متقايس الأضلاع.

4) أ) التمثيل موضح في الرسم .

ب) لدينا $z_D=e^{\frac{2\pi}{3}i}z_C=4\sqrt{3}+4i$

ج) لدينا $z_D=e^{\frac{2\pi}{3}i}z_C=4\sqrt{3}+4i=2z_B$ و منه النقطة D صورة النقطة B بالتحاكي الذي O مركزه ونسبته 2

د) لدينا $\dfrac{z_O-z_A}{z_D-z_A}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{2}i}$ و هو عدد تخيلي صرف و عليه يكون المثلّث OAD قائم في A .

التّمرين الخامس: (07 نقاط) إجباري

I. الجزء الأول:

1- لدينا g دالّة عدديّة مُعرّفة على المجال $\left]0,+\infty\right[$ بـ $g(x)=e+\dfrac{\ln x}{x}$

حساب نهايات الدّالّة g بجوار أطراف مجموعة تعريفها.

نهاية الدّالّة g بجوار $+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=e$

نهاية الدّالّة g بجوار 0 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=-\infty$

الدّالّة g قابلة للإشتقاق على $\left]0,+\infty\right[$ ودالّتها المشتقّة هي :

$.g'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$

ومنه الدّالّة g متزايدة تماماً على $]0;e]$ و متناقصة تماماً على $[e;+\infty[$. وجدول تغيُّراتها هو :

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1+e^2}{e}$	$\searrow$	e

2) حل في المجال $]0,+\infty[$ المعادلة $g(x)=e$ يكافئ $x=1$

3) أحسب $g(\frac{1}{e})=0$ و منه اشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II. نعتبر f الدالّة العدديّة المُعرّفة على $]0,+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+ex+e$

1) حساب نهايات الدّالّة f بجوار أطراف مجموعة تعريفها. و تفسير النتائج هندسيا .

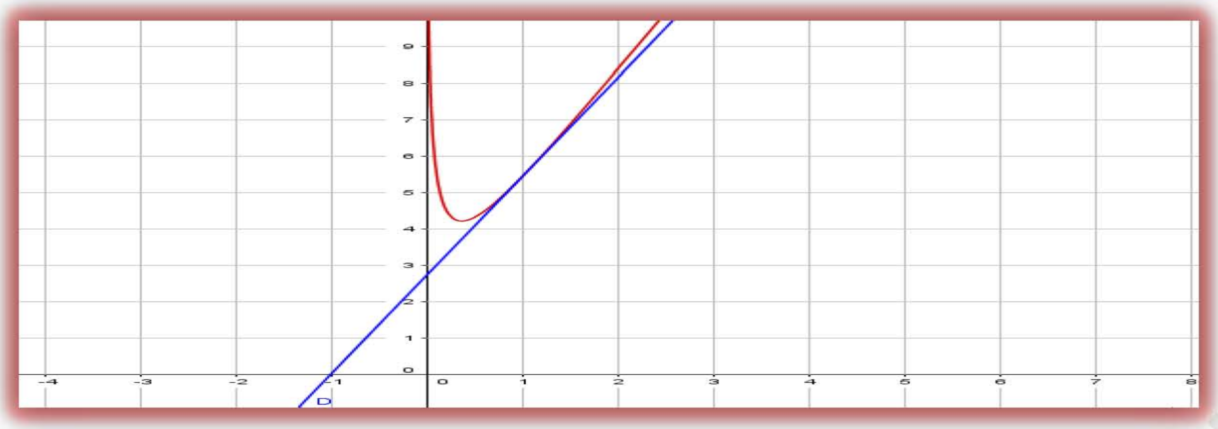
نهايةالدّالّة f بجوار $+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و نهاية الدّالّة f بجوار 0 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$

2) الدّالّة f قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ ودالّتها المشتقّة $f'(x)=g(x)$ و بما ان فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$. وجدول تغيُّراتها هو

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3+2e}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

3) معادلة المماس (Δ) هي $y=ex+e$ لداسة الوضع النسبي ندرس اشارة $\frac{1}{2}(\ln)^2$ أي أن المنحنى (C_f) فوق المستقيم (Δ) من أجل كل $x>0$

4) أنشئ (C_f)



5) المناقشة، بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة، ذات المجهول الحقيقي x،

حيثُ $(\ln(x))^2-2x(m-e)=0$ يكافئ $(\ln(x))^2=2x(m-e)$ يكافئ

$\frac{1}{2}(\ln(x))^2=x(m-e)$ يكافئ $\frac{1}{2}(\ln(x))^2+ex=xm$ يكافئ

$\frac{1}{2}(\ln(x))^2+ex+e=xm+e$ ، يكافئ $f(x)=xm+e$ مناقشة دورانية هي

فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم المتحرك الدوراني ذو المعادلة $y=mx+e$

- $m<e$ تكافئ لاتوجد حلول
- $m=e$ حل مضاعف موجب .
- $m>e$ حل مضاعف موجب

بالتوفيق في شهادة البكالوريا 2018

زايدي علاء الدين

مجموعة الرياضيات الجزائرية