فرض الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

تمرين 1 (10 ن):

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الاول $u_0=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{u_n}{3-2u_n}$

1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فان : $0\prec u_n \prec 1$.

ب- بين أن (u_n) متتالية متناقصة تماما .

جـ- استنتج أن (u_n) متقاربة .

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=\frac{u_n}{u_n-1}$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ وأحسب حدها الاول v_0 .

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{1}{1+3^n}$.

جـ- احسب نهاية المتتالية (u_n) .

3) أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+....+\frac{1}{u_n}$.

تمرين 2 (10 ن):

نعتبر صندوقين متماثلين U_1 و U_2 بحيث :

U_1 يحتوي على خمس كرات حمراء تحمل الارقام 1 ، 1 ، 1 ، 2 ، 0 وثلاث كرات خضراء تحمل الارقام 1 ، 1 ، 0

U_2 يحتوي على ثلاث كرات حمراء تحمل الارقام 1 ، 1 ، 2 وكرتين خضراوين تحملان الرقمين 1 ، 0 .

(كل الكرات لا نفرق بينها عند اللمس) .

I) نختار عشوائيا أحد الصندوقين فإذا كان U_1 نسحب منه كرتين على التوالي بدون ارجاع وإذا كان U_2 نسحب منه كرتين على التوالي بالارجاع .

1- أحسب احتمال الحوادث الاتية :

A " سحب كرتين من نفس اللون ".

B " سحب كرتين تحملان نفس الرقم ".

C " سحب كرة حمراء على الاقل ".

2- هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟ علل .

3- اذا علمت ان الكرتين المسحوبتين من لونين مختلفين ، فما احتمال ان تكون من الصندوق U_1 ؟

II) نأخذ الكرات الموجودة في الصندوقين U_1 و U_2 ونضعها جميعها في صندوق واحد U_3 . نسحب عشوائيا من الصندوق U_3 كرتين في آن واحد. وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة مجموع الارقام التي تحملها الكراتين المسحوبتين

1- عين قيم المتغير العشوائي X .

2- عرف قانون الاحتمال لـ X .

بالتوفيق .

3as.ency-education.com

الاجابة النموذجية :

تمرين 1 :

1- ا) البرهان بالتراجع على انه من أجل كل عدد طبيعي n فان : $0 \prec u_n \prec 1$:

☜ من أجل $n=0$ لنا : $0 \prec u_0 = \frac{1}{2} \prec 1$ محققة .

☜ نفرض أن الخاصية صحيحة من اجل n ونبرهن على صحتها من اجل $n+1$ (أي نبرهن من أجل كل عدد طبيعي n $0 \prec u_{n+1} \prec 1$).

لنا من اجل كل عدد طبيعي n : $0 \prec u_n \prec 1$ تكافئ : $-2 \prec -2u_n \prec 0$ تكافئ : $1 \prec 3-2u_n \prec 3$

ومنه : $0 \prec \frac{u_n}{3-2u_n} \prec 1$ أي : $0 \prec u_{n+1} \prec 1$.

بما ان الخاصية صحيحة من اجل $n+1$ فهي صحيحة من اجل n وذلك حسب البرهان بالتراجع .

ب) بيان ان (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}-u_n = \frac{u_n}{3-2u_n} - u_n = \frac{u_n - u_n(3-2u_n)}{3-2u_n} = \frac{u_n - 3u_n + 2u_n^2}{3-2u_n} = \frac{2u_n^2 - 2u_n}{3-2u_n} = \frac{2u_n(u_n-1)}{3-2u_n}$$

لنا : $0 \prec u_n \prec 1$ أي : $2u_n \succ 0$ و $-1 \prec u_n - 1 \prec 0$ أي : $u_n - 1 \prec 0$ ولنا : $1 \prec 3-2u_n \prec 3$ أي : $3-2u_n \succ 0$

ومنه : $u_{n+1}-u_n \prec 0$ أي المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

ج) استنتاج ان (u_n) متقاربة : لنا (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الاسفل بالعدد 1 فهي متقاربة .

2- أ - بيان ان (v_n) هندسية اساسها $q=\frac{1}{3}$ وحساب حدها الأول :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1} = \frac{\frac{u_n}{3-2u_n}}{\frac{u_n}{3-2u_n}-1} = \frac{\frac{u_n}{3-2u_n}}{\frac{3u_n-3}{3-2u_n}} = \frac{u_n}{3u_n-3} = \frac{1}{3}\times\frac{u_n}{u_n-1} = \frac{1}{3}v_n$$

حساب الحد الأول : $v_0 = \frac{u_0}{u_0-1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} = -1$.

ب – كتابة عبارة v_n بدلالة n : $v_n = v_0 \times q^n = -1\times\left(\frac{1}{3}\right)^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

لدينا : $v_n = \frac{u_n}{u_n-1}$ تكافئ : $v_n(u_n-1)=u_n$ تكافئ : $v_nu_n - v_n = u_n$ تكافئ : $v_nu_n - u_n = v_n$ تكافئ :

$u_n(v_n-1)=v_n$ تكافئ : $u_n = \frac{v_n}{v_n-1}$ تكافئ :
$$u_n = \frac{-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{-\left(\frac{1}{3}\right)^n-1} = \frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n}+1} = \frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1+3^n}{3^n}} = \frac{1}{3^n}\times\frac{3^n}{1+3^n} = \frac{1}{1+3^n}$$

ج - حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+3^n} = 0$ (لان : $\lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$)

3as.ency-education.com

3- حساب المجموع S_n :

$$S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+....+\frac{1}{u_n}=\frac{1}{\frac{1}{1+3^0}}+\frac{1}{\frac{1}{1+3^1}}+.....+\frac{1}{\frac{1}{1+3^n}}=1+3^0+1+3^1+...+1+3^n=1+1+...+1+3^0+3^1+...+3^n$$

$$=1\times(n-0+1)+3^0\times\frac{3^{n-0+1}-1}{3-1}=n+1+\frac{3^{n+1}-1}{2}=n+1+\frac{1}{2}\times\left(3^{n+1}-1\right)$$

تمرين 2 :

I)

1) حساب احتمال الحوادث :

$p(A)=p(u_1\cap A)+p(u_2\cap A)$ $=\frac{1}{2}\times\frac{A_5^2+A_3^2}{A_8^2}+\frac{1}{2}\times\frac{3^2+2^2}{5^2}=\frac{689}{1400}$	$p(B)=p(u_1\cap B)+p(u_2\cap B)$ $=\frac{1}{2}\times\frac{A_5^2+A_2^2}{A_8^2}+\frac{1}{2}\times\frac{3^2}{5^2}=\frac{527}{1400}$	$p(C)=p(u_1\cap C)+p(u_2\cap C)$ $=\frac{1}{2}\times\frac{A_5^1\times A_3^1\times 2+A_5^2}{A_8^2}+\frac{1}{2}\times\frac{3^2+3^1\times 2^1\times 2}{5^2}=\frac{1213}{1400}$

2) الحدثان A و B غير مستقلان لان :

$$p(A\cap B)=p(U_1\cap A\cap B)+p(U_2\cap A\cap B)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{A_3^2+A_2^2}{A_8^2}+\frac{1}{2}\times\frac{2^2}{5^2}=\frac{53}{350}$$

لنا : $p(A)\times p(B)=\frac{689}{1400}\times\frac{527}{1400}\approx 0.18$ أي $p(A)\times p(B)\neq p(A\cap B)$

3) حساب احتمال ان تكون الكرتين المسحوبتين من U_1 علما انهما مختلفتان في اللون .

$$p_{\bar{A}}(U_1)=\frac{P\left(U_1\cap\bar{A}\right)}{P\left(\bar{A}\right)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{A_5^1\times A_3^1\times 2}{A_8^2}}{1-P(A)}=\frac{\frac{15}{56}}{1-\frac{689}{1400}}=\frac{\frac{17}{56}}{\frac{711}{1400}}=\frac{425}{711}$$

II)

1- قيم المتغير العشوائي : 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4

2- قانون الاحتمال للمتغير العشوائي :

$$P(X=0)=\frac{C_3^2}{C_{13}^2}=\frac{1}{26}$$

$$P(X=1)=\frac{C_3^1\times C_8^1}{C_{13}^2}=\frac{24}{78}=\frac{4}{13}$$

$$P(X=2)=\frac{C_8^2+C_3^1\times C_2^1}{C_{13}^2}=\frac{17}{39}$$

$$P(X=3)=\frac{C_8^1\times C_2^1}{C_{13}^2}=\frac{8}{39}$$

$$P(X=4)=\frac{C_2^2}{C_{13}^2}=\frac{1}{78}$$

$X=x_i$	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{26}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{17}{39}$	$\frac{8}{39}$	$\frac{1}{78}$

3as.ency-education.com