

3

علوم تجريبية

المدة: ساعتان
التاريخ: 2019/03/04ثانوية أول نوفمبر 1954
الاغواط

الرياضيات

اختبار الثلاثي الثاني في مادة

التوقيت (35 دقيقة)

التمرين الأول:

06.5
نقاط

يحتوي صندوق u_1 على أربع كرات بيضاء وثلاث كرات سوداء وكرتين حمراوين . لا يمكن التمييز بينها باللمس
نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من u_1 ولتكن الأحداث :

A " سحب كرتين سوداوين وكرة حمراء " ، B " سحب ثلاث كرات من نفس اللون " ، C " سحب كرة بيضاء واحدة على الأقل "

$$(1) \text{ بين أن: } P(A) = \frac{1}{14} \text{ ثم أحسب } P(B) \text{ و } P(C)$$

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الألوان التي تحملها الكرات المسحوبة
أ/ حدّد قيم المتغير العشوائي X

ب/ حدّد قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

ج/ اللاعب يدفع $50DA$ قبل إجراء السحب، ويكسب $25DA$ لكل لون من الألوان المحصل عليها. هل اللعبة مربحة له ؟

(4) نعتبر صندوقا آخر u_2 يحتوي على كرتين بيضاوين وكرة سوداء

نضع الكرات الثلاثة المسحوبة من u_1 في الصندوق u_2 ثم نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من u_2
* ما احتمال أنّ الكرتان المسحوبتان من u_2 بيضاوين علما أنّ الكرات الثلاثة المسحوبة من u_1 لها نفس اللون

التوقيت (35 دقيقة)

التمرين الثاني

المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر النقط $A; B; C$ التي لواحقها على الترتيب:

$$z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_B = -(i)^{2019}z_A \quad \text{و} \quad z_C = \overline{z_A} \quad (\overline{z_A} \text{ مرافق } z_A)$$

(1) أكتب z_B, z_A على الشكل الجبري .

(2) أكتب العدد $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

$$(3) \text{ أ) حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة ذات المجهول } z : \frac{1+i-z}{-1+i-z} = 2e^{i\pi} \dots (E)$$

ب) استنتج أن النقطة A هي صورة النقطة B بواسطة تشابه مباشر S مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة z_Ω

(حيث z_Ω هي حل المعادلة (E)) يطلب تعيين عناصره المميزة وكتابة عبارته المركبة .

06.5
نقاط

إقلب الصفحة

4) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد المركب $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا موجبا.

5) أ) عيّن (Γ) مجموعة النقط M من المستوى ذات اللاحقة Z حيث: $z = z_C - k \frac{z_A}{z_C}$ ، k يسمح \mathcal{R}_+^*

ب) عيّن (Γ') مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى حيث: $\arg \left[\left(\frac{z_A - z}{z_B - z} \right)^2 \right] = \pi + 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

التوقيت (40 دقيقة)

التمرين الثالث

06.5

نقاط

لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} ب: $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

حيث a ، b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس

1- عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0; -3)$ مماسا معامل توجيهه 3

والعدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x) = 0$.

2- نضع $a = 1$ ، $b = 0$ ، $c = -3$.

أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3- أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$ ثم عين إحداثيات نقط تقاطع

(C_f) مع حامل محور الفواصل.

4- أرسم (T) و (C_f) .

5- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من \mathbb{R} فإن $f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x}$ ثم استنتج دالة

أصلية للدالة f على \mathbb{R} .

6- عيّن (بيانيا) قيم العدد الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $x^2 - 3 + me^x = 0$ حلين ساليين.

تمنح (0.5 نقطة) لتنظيم وثيقة الإجابة

*** انتهى ***



حكمة: تستطيع أن تنجح في حياتك ولو كان كل الناس يعتقدون أنك غير ناجح ولكنك لا تنجح أبدا إذا كنت تعتقد في نفسك أنك غير ناجح.

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح....أستاذ المادة: تونسي ن



$$(1) \text{ تبين أن: } P(A) = \frac{1}{14} \text{ ، لدينا } \frac{6}{84} = \frac{1}{14} = \frac{c_3^2 \times c_2^1}{c_9^3}$$

$$p(B) = \frac{c_4^3 + c_3^3}{c_9^3} = \frac{5}{84} \approx 0.06.$$

الحدث C : سحب كرة بيضاء على الأقل الحدث \bar{C} : عدم سحب كرة بيضاء

$$p(C) = \frac{c_4^1 \times c_5^2 + c_4^2 \times c_5^1 + c_4^3 \times c_5^0}{c_9^3} = \frac{74}{84} \approx 0.88 \text{ ط } p(C) = 1 - p(\bar{C}) = 1 - \frac{c_5^3}{c_9^3} = \frac{74}{84} \approx 0.88$$

(2) قيم المتغير العشوائي X هي: 1 ; 2 ; 3

$$\text{ب/ } X = 1 \text{ : "سحب 3 كرات بلون واحد" } p(X = 1) = p(B) = \frac{c_4^3 + c_3^3}{c_9^3} = \frac{5}{84}$$

"سحب 3 كرات بلونين مختلفين"

$$p(X = 2) = \frac{c_4^2 \times c_5^1 + c_3^2 \times c_6^1 + c_2^2 \times c_7^1}{c_9^3} = \frac{55}{84} \text{ أو } (B; B; \bar{B}) \text{ أو } (N; N; \bar{N}) \text{ أو } (R; R; \bar{R})$$

$$p(X = 3) = \frac{c_4^1 \times c_3^1 \times c_2^1}{c_9^3} = \frac{24}{84} \text{ "سحب 3 كرات بثلاث ألوان مختلفة"}$$

(ج) ليكن Y متغير عشوائي يمثل الربح الصافي الذي يحققه اللاعب قيمة: +25 ; 0 ; -25 .

$$E(Y) = -25 \left(\frac{5}{84}\right) + 0 \left(\frac{55}{84}\right) + 25 \left(\frac{24}{84}\right) = \frac{475}{84} \approx 5.65 \text{ بمأن: } E(Y) > 0 \text{ فإن اللعبة مريحة لهذا اللاعب}$$

(3) حساب احتمال ان تكون الكرتان من U_2 بياضين علما أن الكرات المسحوبة من لها نفس اللون:

$$\text{ليكن الحدث } F \text{ : سحب كرتان من } U_2 \text{ بياضين ، لدينا: } p_B(F) = \frac{p(B \cap F)}{p(B)}$$

$$p_B(F) = \frac{p(B \cap F)}{p(B)} = \frac{\frac{41}{1260}}{\frac{5}{84}} = \frac{41}{75} \approx 0.55 \text{ ، ومنه: } p(B \cap F) = \frac{c_4^3}{84} \times \frac{c_5^2}{c_6^2} + \frac{c_3^3}{84} \times \frac{c_2^2}{c_6^2} = \frac{41}{1260}$$

التمرين الثاني:

$$(1) \text{ كتابة } z_B, z_A \text{ على الشكل الجبري: } z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i \quad z_B = -(i)^{2019} z_A = i z_A = -1 + i$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i \text{ الاستنتاج: بما أن } \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ و } \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$$

فإن $(\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{\pi}{2}$ اذن المثلث ABC قائم في A ومتقايس الضلعين $AB = AC = 2$

(3) نحل في C المعادلة (E) ذات المجهول z :

$$(E) \text{ يكافئ } \frac{1+i-z}{-1+i-z} = 2(-1) \text{ يكافئ } 3z = -1 + 3i \text{ ومنه: } z = \frac{-1}{3} + i \text{ اذن: } S = \left\{ \frac{-1}{3} + i \right\}$$

(ب) استنتاج أن A هي صورة B بواسطة تشابه مباشر S مركزه النقطة Ω لاحتقائها $z_\Omega = \frac{-1}{3} + i$ من (E) نستنتج $\frac{z_A - z_\Omega}{z_B - z_\Omega} = 2e^{i\pi}$

ومنه: $z_A - z_\Omega = 2e^{i\pi}(z_B - z_\Omega)$ العبارة من الشكل $z_A - z_\Omega = ke^{i\theta}(z_B - z_\Omega)$ معناها $S(B) = A$ حيث S تشابه مباشر

$$\text{نسبته } k = 2 \text{ وزاويته } \theta = \pi \text{ ومركزه النقطة الصامدة } \Omega \text{ لاحتقائها } z_\Omega = \frac{-1}{3} + i \text{ . عبارته المركبة: } z' = -2z - 1 + 3i$$

حالة خاصة: S هو تحاك مركزه النقطة Ω ونسبته -2 $K = -2$

$$(4) \text{ نعيّن قيم العدد الطبيعي } n \text{ التي من أجلها يكون العدد المركب } \left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n \text{ حقيقيا موجيا: } \frac{z_A}{z_C} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n = e^{i n \frac{\pi}{2}} \text{ عدد حقيقي موجب يكافئ } \frac{n\pi}{2} = 2k\pi \text{ ومنه: } n = 4k \text{ حيث } k \in \mathbb{N}$$

(5) نعيّن (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى حيث $z = z_C - k \frac{z_A}{z_C}$ ، k يسمح \mathcal{R}_+ :

$$z - z_C = k \left(e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)}\right) = k \left(e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}\right) \text{ أي } z - z_C = k \left(-e^{i\frac{\pi}{2}}\right) \text{ أي } z - z_C = -k \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right) \text{ أي } z = z_C - k \frac{z_A}{z_C}$$

$$|z - z_C| = k \text{ و } \arg(z - z_C) = \frac{3\pi}{2}$$

ومنه: (Γ) هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة C موازي لحامل محور الترتيب شعاع توجيهه لاحتقته $-i$. $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$ (باستثناء C)

0.75

(ب) تعيّن (Γ') مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى حيث: $\arg \left[\left(\frac{z_A - z}{z_B - z} \right)^2 \right] = \pi + 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$ ، (1) يكافئ
 $2 \arg \left(\frac{z_A - z}{z_B - z} \right) = \pi + 2k\pi$ يكافئ $\arg \left(\frac{z_A - z}{z_B - z} \right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ومنه: (Γ') هي دائرة قطرها $[AB]$ ماعدا النقطتين A ; B

التمرين الثالث:

0.75

1- تعيّن الأعداد الحقيقية a ; b ; c : $f(0) = -3$ و هذا يعني $c = -3$
 ولدينا $f'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = [-ax^2 + (2a - b)x + b - c]e^{-x}$
 $f'(0) = 3$ يعني أن $b - c = 3$; ومنه $b = 0$. $f(\sqrt{3}) = 0$ يعني أن $f(\sqrt{3}) = (3a - 3)e^{-\sqrt{3}} = 0$ ومنه $a = 1$
 2- نضع $a = 1$, $b = 0$, $c = -3$ تصبح $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$

0.5

حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4t^2}{e^{2t}} \right]$ نجد $x = 2t$ لأنه بوضع $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$

0.5

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2)e^{-x} = +\infty$. $4 \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{e^t} \right)^2 = 0$

0.5

دراسة اتجاه تغير الدالة f : المشتقة: $f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x}$ إشارة $(-x^2 + 2x + 3)$ تنعدم عند العددين -1 و 3 ومنه f متناقصة على المجالين $]-\infty; -1[$ و $]3; +\infty[$ متزايدة على المجال $]-1; 3[$

0.5

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		$\frac{6}{e^3}$	0

و شكل جدول تغيراتها:

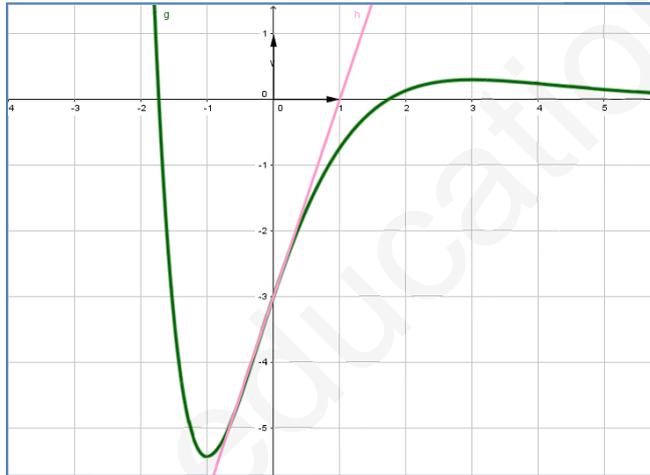
0.5

3- معادلة المماس (T) هي $y = 3x - 3$

0.5

تعيّن إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

0.25



0.5+

4- رسم (T) و (C_f)

5- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من \mathbb{R} فإن

$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x}$

$f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$

$f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x}$ و

$f''(x) = (-2x + 2)e^{-x} + (x^2 - 2x - 3)e^{-x}$

أي أن $f''(x) = (x^2 - 4x - 1)e^{-x}$

0.75

ومنه $f(x) + 2f'(x) + f''(x) = (x^2 - 3 - 2x^2 + 4x + 6 + x^2 - 4x - 1)e^{-x} = 2e^{-x}$

استنتاج دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R}

0.75

$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x}$ يكافئ $f(x) = -2f'(x) - f''(x) + 2e^{-x}$ ومنه الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F

حيث $F(x) = -2f(x) - f'(x) - 2e^{-x}$ أي $F(x) = -2(x^2 - 3)e^{-x} - (-x^2 + 2x + 3)e^{-x} - 2e^{-x}$ أي

$F(x) = (-2x^2 + 6)e^{-x} + (x^2 - 2x - 3)e^{-x} - 2e^{-x}$ ومنه $F(x) = (-x^2 - 2x + 1)e^{-x}$

6- تعيّن قيم العدد الحقيقي m : المعادلة تكافئ $me^x = -(x^2 - 3)$ أي أن $-m = (x^2 - 3)e^{-x}$ يكافئ $f(x) = -m$

0.5

لما $-m > -2e$ أي أن $3 < m < 2e$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتين فاصلاتهما سالبتان ومنه للمعادلة حلين سالبين

الأستاذ: تونسي ن يمني لكم التوفيق والنجاح