إختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات

2020 – 2019　　　المدة : 03 سا

تجنّب الشطب و استعمال المصحّح.

التمرين الأول: (04 نقاط)

بين صحة و خطأ كل من الجمل التالية مع التعليل:

1. مهما يكن العدد الحقيقي x: $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.
2. $\ln(3e^{\pi})=\pi+\ln 3$.
3. الدالة $x\longmapsto e^{-2x}$ هي حل المعادلة التفاضلية $y'=2y$.
4. المتراجحة $e^{1-2x}>e^{x+1}$ لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$.
5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(e^x+4)=2\ln 2$.

التمرين الثاني: (08 نقاط)

لتكن الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=(x-1)e^{-x}+2$.

1. أدرس تغيرات الدالة g .
2. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.38,-0.37[$.
3. إستنتج إشارة $g(x)$.

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2x+1-xe^{-x}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ (وحدة الطول $2cm$) .

1. بين أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$.
2. أدرس تغيرات الدالة f .
3. بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.
4. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ).
5. بين أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف .
6. بين أن : $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha-1}$.

7 أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم المقارب (Δ) (نأخذ $\alpha = -0.375$) .

✍ (Δ_m) مستقيم معادلته $y = 2x + m$ حيث m عدد حقيقي .

1 عين m حتى يكون (Δ_m) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

2 ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة التالية : $\frac{x}{e^x} + 1 - m = 0$.

التمرين الثالث: (08 نقاط)

✍ نعتبر الدالة g المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)$.

1 أدرس اتجاه تغير الدالة g.

2 بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1; +\infty[$، أحسب $g\left(\frac{3}{2}\right)$ و $g\left(\frac{5}{2}\right)$، أعط حصرا لـ α بتقريب $0,1$.

3 إستنتج اشارة $g(x)$ على $[0; +\infty[$.

✍ نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x}, & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

و ليكن (C_f) التمثيل البياني لـ f في معلم متعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$ $(\|\vec{i}\| = 1\,\text{cm} \,;\, \|\vec{j}\| = 3\,\text{cm})$.

1 أحسب $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

2 إستنتج أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 ثم أكتب معادلة T المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

3 تحقق أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f(x) = \frac{2\ln x}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$، إستنتج $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

4 أثبت أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

5 إستنتج اشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

6 بين أنّ $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{(\alpha^2+1)}$ ثم إستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

7 أنشئ T ثم (C_f).

8 في نفس المعلم أنشئ (C_h) منحنى الدالة h المعرفة على $]-\infty; 0[$ بـ: $h(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x}$.

إذا أردت أن تنجح بحق، ستجد طريقا ما ، وإذا كنت لا تريد فستجد عذرا .

أستاذ المادة : مزيان محمد

التصحيح النموذجي لإختبار الثلاثي الأول

إذا أردت أن تنجح بحق، ستجد طريقا ما، وإذا كنت لا تريد فستجد عذرا.

التمرين الأول: (04 نقاط)

نبين صحة أو خطأ الجمل مع التعليل :

1. خطأ لأن : $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \dfrac{e^x(e^x-e^{-x})}{e^x(e^x+e^{-x})} = \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.
2. صحيح لأن : $\ln(3e^{\pi}) = \ln 3 + \ln e^{\pi} = \ln 3 + \pi$.
3. خطأ لأن : حلول المعادلة التفاضلية $y' = 2y$ هي من الشكل : $y = f(x) = ke^{2x}$, حيث k عدد حقيقي كيفي.
4. خطأ لأن : المتراجحة $e^{1-2x} > e^{x+1}$ لها الحلول $S = \{]-\infty;0[\}$.
5. صحيح لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(e^x+4) = \ln 4 = \ln 2^2 = 2\ln 2$.

التمرين الثاني: (08 نقاط)

g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (x-1)e^{-x}+2$

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \boxed{-\infty}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{e^x} - e^{-x} + 2\right) = \boxed{2}$

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x) = (2-x)e^{-x}$ ومنه إشارة $g'(x)$ من نفس إشارة $(2-x)$ وجدول تغيراتها يعطى بالشكل :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$e^{-2}+2$	$\searrow$	2

2. إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.38, -0.37[$.

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty, 2]$ ومنه على المجال : $]-0.38, -0.37[$.
وبما أن $g(-0.38)\times g(-0.37) < 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.38, -0.37[$.

3 إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$ $\quad\quad$ α $\quad\quad$ $+\infty$
$g(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

✍ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$

1 لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = 2 - e^{-x} + xe^{-x} = (x-1)e^{-x} + 2$ ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$

2 دراسة تغيرات الدالة f

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$ ولدينا ايضا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$ $\quad\quad$ α $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ $f(\alpha)$ $\nearrow$ $+\infty$

3 لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} -xe^{-x} = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - 2x - 1] =$ ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

4 لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ) ندرس إشارة الفرق $f(x) - (2x+1)$

لدينا $f(x) - (2x+1) = -xe^{-x}$ ومنه فإن إشارة الفرق هي عكس إشارة x

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - (2x+1)$	$+$	||	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	||	(C_f) تحت (Δ)

5 إثبات أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف .

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f''(x) = g'(x)$ ومنه

x	$-\infty$ $\quad\quad$ 2 $\quad\quad$ $+\infty$
$f''(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$

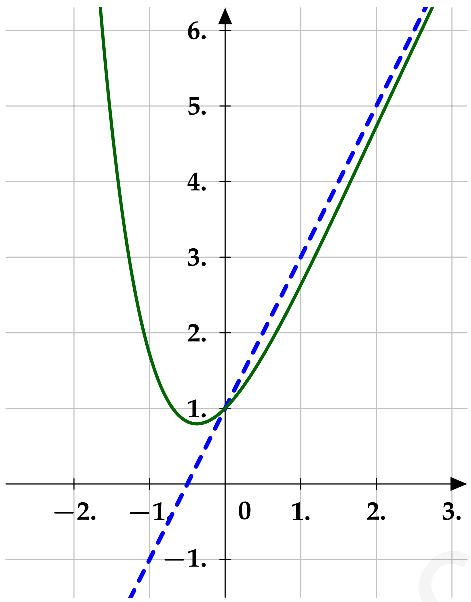
بما أن $f''(x)$ تنعدم مغيرة إشارتها عند 2 فإن النقطة $\left(2; 5 - \frac{2}{e^2}\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

6 إثبات أن : $f(\alpha) = \dfrac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$

$g(\alpha)=0$ تكافؤ $e^{-\alpha}=-\dfrac{2}{\alpha-1}$

ومنه: $f(\alpha)=2\alpha+1\alpha-e^{-\alpha}=2\alpha+1+\dfrac{2\alpha}{\alpha-1}=\dfrac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha-1}$

7 رسم المنحنى (C_f)



✍ (Δ_m) مستقيم معادلته $y=2x+m$ حيث m عدد حقيقي

1 تعيين m حتى يكون (Δ_m) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

المستقيم $y=2x+m$ مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة x_0 منه يعني : $f'(x_0)=2$ اي أن $g(x)=2$ ومنه $(x-1)e^{-x}=0$ وبالتالي $x_0=1$

لدينا : $f(1)=3-e^{-1}$ ومنه معادلة المماس هي $y=2x+1-e^{-1}$ بالمطابقة نجد $m=1-e^{-1}$

2 المناقشة البيانية :

$\dfrac{x}{e^x}+1-m=0$ يعني $m=-xe^{-x}+1$ بإضافة $2x$ للطرفين نجد $m+2x=-xe^{-x}+1+2x$ أي أن $m+2x=f(x)$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ_m), لدينا عندئذ :

✍ إذا كان $m\in]-\infty,1-e^{-1}[$ المعادلة لا تقبل حلولا .

✍ إذا كان $m=1-e^{-1}$ للمعادلة حل مضاعف .

✍ إذا كان $m\in]1-e^{-1},1[$ للمعادلة حلان .

✍ إذا كان $m\succ 1$ للمعادلة حل وحيد.

التمرين الثالث: (08 نقاط)

✍ g هي الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}-\ln(x^2+1)$.

1 دراسة اتجاه تغير الدالة g:

♥ النهايات: $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

♥ الدالة المشتقة: g تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا: $g'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2} - \frac{2x}{x^2+1}$

أي: $g'(x) = \frac{-2x^2(x-1)}{(x^2+1)^2}$

♥ جدول التغيرات:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$1-\ln(2)$	$\searrow$	$-\infty$

2 الدالة g معرفة ، مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و $g(1) = 1 - \ln 2 > 0$
و $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ أي: $g(1) \times \lim_{x\to+\infty} g(x) < 0$. إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1;+\infty[$.

♥ إيجاد حصر لـ α :

$g(\frac{3}{2}) = \frac{9}{13} - \ln(\frac{13}{4}) \simeq 0.21$ و $g(\frac{5}{2}) = \frac{25}{29} - \ln(\frac{29}{4}) \simeq -0.26$ ومنه: $g(\frac{3}{2}) \times g(\frac{5}{2}) < 0$

و بما أن $\left[\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right] \subset [1;+\infty[$ فإن $\frac{3}{2} < \alpha < \frac{5}{2}$

x	1.7	1.8	1.9	2
$g(x)$	0.13	0.08	0.04	-0.01

و منه $\boxed{1.9 < \alpha < 2}$

3 إشارة $g(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	0	$+$	0	$-$	

✍ f هي الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} \text{ , } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1 $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1$$

2 بما أن $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 1$ فإن f تقبل الاشتقاق عند 0 و لدينا $f'(0) = 1$

♥ معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0. $(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$

و منه $(T): y = x$

3 التحقق أنه من أجل كل x من $x \in]0,+\infty[$

$$f(x)=\frac{2\ln x}{x}+\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{2\ln x}{x}+\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) &= \frac{2\ln x}{x}+\frac{1}{x}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)\\
&= \frac{2\ln x}{x}+\frac{1}{x}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{1}{x}\ln(x^2)\\
&= \frac{2\ln x}{x}+\frac{1}{x}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{2\ln x}{x}\\
&= \frac{1}{x}\ln\left(x^2+1\right)\\
&= \boxed{f(x)}
\end{aligned}$$

♥ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+\dfrac{1}{x^2})=0\end{cases}$$
و منه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

4 الاثبات أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ من أجل $x\in]0,+\infty[$:
$$f'(x)=\frac{\frac{2x}{x^2+1}.x-\ln(x^2+1)}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

5 إشارة $f'(x)$ مثل إشارة $g(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

♥ جدول تغيرات f:

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

6 الاثبات أن : $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha}{(\alpha^2+1)}$; لدينا : $g(\alpha)=0$ أي: $\dfrac{2\alpha^2}{\alpha^2+1}-\ln(\alpha^2+1)=0$

و منه : $\ln(\alpha^2+1)=\dfrac{2\alpha^2}{\alpha^2+1}$ و بالتالي: $f(\alpha)=\dfrac{\ln(\alpha^2+1)}{\alpha}=\dfrac{2\alpha^2}{\alpha(\alpha^2+1)}=\dfrac{2\alpha}{(\alpha^2+1)}$

♥ حصر $f(\alpha)$: لدينا: $1.9<\alpha<2$ و منه : $3.8<2\alpha<4$ و $4.61<\alpha^2+1<5$

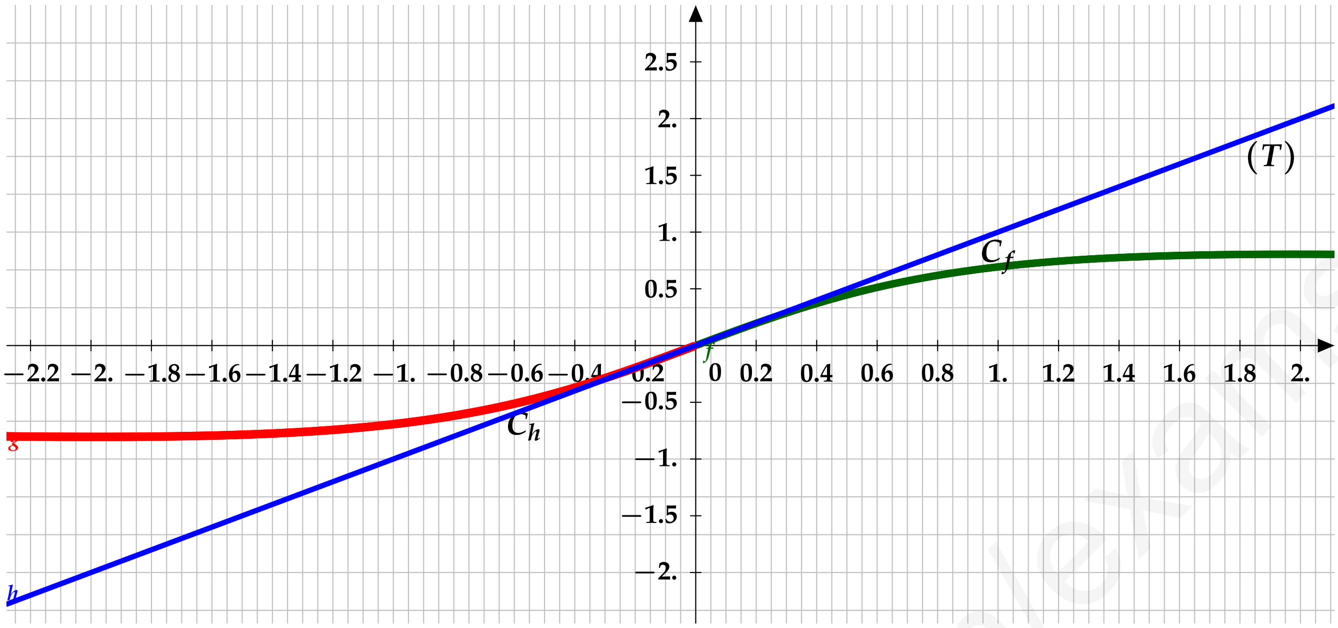
و منه: $\dfrac{1}{4.61}<\dfrac{1}{\alpha^2+1}<\dfrac{1}{5}$ وبالتالي: $\dfrac{4}{4.61}<\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}<\dfrac{3.8}{5}$ أي: $0.76<f(\alpha)<0.87$

7 انشاء (T) و (C_f)

8 إنشاء (C_h) منحنى الدالة h

إذا كان $x>0$ فإن $-x<0$ و لدينا: $-f(x)=-\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}=\dfrac{\ln((-x)^2+1)}{-x}=h(-x)$

ومنه (C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة الى مبدأ المعلم.



Bac 2020 Math