التمرين: -أ-

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بِـ $u_0=\alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=u_n(2-u_n)$.

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f المعرفة على $[0\,;\,2]$ بـ : $f(x)=x(2-x)$

و (Δ) هو المستقيم الذي معادلته $y=x$

1- عين قيمة α بحيث تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2- نضع $\alpha=\frac{1}{8}$ باستعمال الرسم مثّل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مع توضيح الخطوط

✓ ضع تخمينا حول إتجاه تغيرات المتتالية (u_n) و تقاربها

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0<u_n<1$

✓ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

✓ إذا كانت (u_n) متقاربة.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $V_n=\ln(1-u_n)$

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب) اكتب v_n بدلالة n.

ج) إستنتج عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

د) احسب المجموع $S_n=(1-u_0)(1-u_1)......(1-u_n)$

$$S'_n=\ln v_0+\ln v_1+.......+\ln v_n$$

التمرين: -ب-

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x+4}{x+1}$

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0=\alpha \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

1- عين قيمة α بحيث تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2- نضع $\alpha=1$ الشكل الموالي يمثل المنحنى (C) للدالة f على المجال $[0;+\infty[$ والمستقيم (D) الذي معادلته $y=x$.

أنقل الشكل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم.

✓ ما تخمنك حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها ؟

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\le u_n\le\frac{5}{2}$.

✓ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\dfrac{2-u_n}{u_n+2}$

أ) احسب $2-u_{n+1}$ و $u_{n+1}+2$ ، ثم بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $-\frac{1}{3}$ ،

ب) اكتب v_n بدلالة n..

ب) عبر عن u_n بدلالة v_n ثم اكتب u_n بدلالة n.. استنتج نهاية المتتالية (u_n).

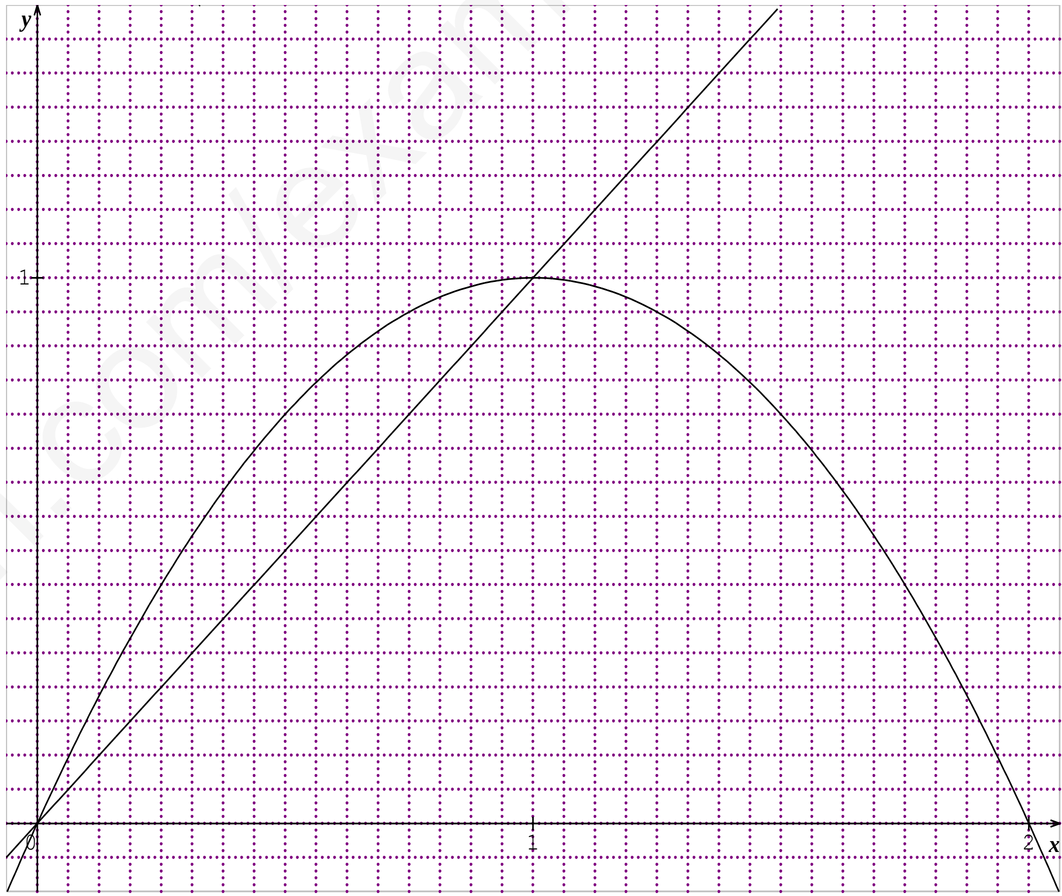
احسب $S_n=\dfrac{4}{u_0+2}+\dfrac{4}{u_1+2}+....+\dfrac{4}{u_n+2}$

قف عند ناصية الحلم وقاتل

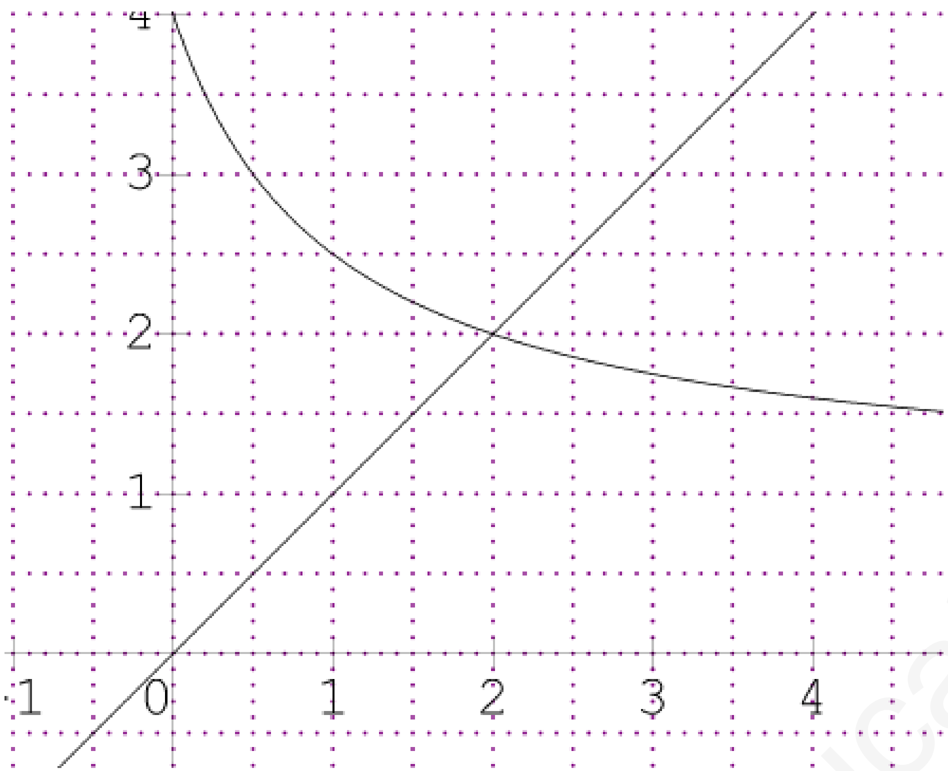
بالتوفيق والنجاح للجميع

الأستاذ قشار صلح

التمرين: -أ-



التمرين: -ب-



الحل النموذجي للفرض المحروس الأول للفصل الثاني

ثانوية سيدي أعباز   الأستاذ قشار صالح

التمرين أ

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0=\alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=u_n(2-u_n)$.

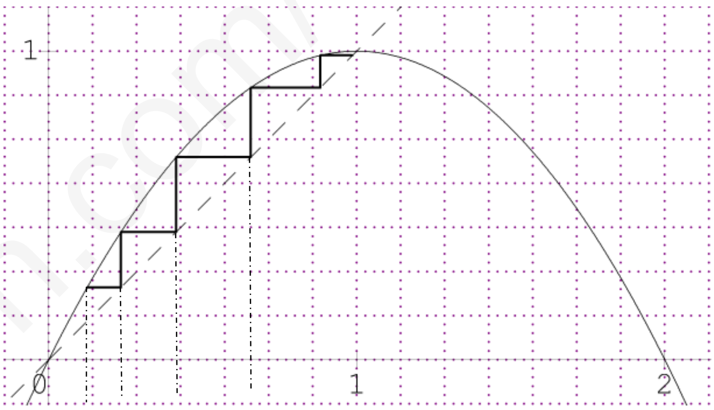
وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f المعرفة على $[0\,;2]$ بـ: $f(x)=x(2-x)$ و (Δ) هو المستقيم الذي معادلته $y=x$

-1 تعيين قيمة α بحيث تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

المتتالية (u_n) ثابتة يكافئ $u_{n+1}=u_n=u_0=\alpha$

$\alpha=\alpha(2-\alpha)$ ومنه $\alpha^2-\alpha=0$ ومنه $\alpha=0$ أو $\alpha=1$

-2 نضع $\alpha=\frac{1}{8}$ تمثيل على حامل محور الفواصل الحدود



u_0 u_1 u_2 u_3

تخمينا حول إتجاه تغيرات المتتالية (u_n) و تقاربها

بما أن $u_0<u_1<u_2<u_3$ فإنها متزايدة ومتقاربة نحو العدد2.

-1 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0<u_n<1$

لدينا $f'(x)=-2x+2$ ومنه الدالة f متزايدة تماماعلى $[0;1]$

التحقق من أجل $n=0$ $u_0=\frac{1}{8}$ ومنه $0<u_0<1$

ومنه الخاصية محققة

نفرض صحة الخاصية من أجل $n\in\mathbb{N}$ $0<u_n<1$

نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $0<u_{n+1}<1$

لدينا $0<u_n<1$ ومنه $f(0)<f(u_n)<f(1)$

ومنه $0<u_{n+1}<1$

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه $n\in\mathbb{N}$ $0<u_n<1$

- دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n).

$$u_{n+1}-u_n=u_n(2-u_n)-u_n=-u_n^2+u_n=u_n(-u_n+1)$$

U_n	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$U_{n+1}-U_n$		$-$	0	$+$	0	$-$	

بما أن $0<u_n<1$ فإن (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

بما أن متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى فإنها متقاربة.

1) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $V_n=\ln(1-u_n)$

أ) بيان أن المتتالية (v_n) هندسية

$$V_{n+1}=\ln(1-u_{n+1})=\ln\left(1-u_n\left(2-u_n\right)\right)$$
$$=\ln\left(1-2u_n+u_n^2\right)=\ln\left(1-u_n\right)^2=2v_n$$

ومنه (v_n) م ه أساسها $q=2$ و $V_0=\ln(1-u_0)=\ln\left(\frac{7}{8}\right)$

ب) كتابة v_n بدلالة n: $v_n=\ln\left(\frac{7}{8}\right)2^n$

ج) إستنتج عبارة u_n بدلالة n

لدينا $V_n=\ln(1-u_n)$ ومنه $e^{v_n}=1-u_n$ ومنه $u_n=1-e^{v_n}$

ومنه $u_n=1-e^{v_n}$ ومنه $u_n=1-e^{\ln\left(\frac{7}{8}\right)2^n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1-e^{\ln\left(\frac{7}{8}\right)2^n}=1$ لأن $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=-\infty$

د) احسب المجموع $S_n=(1-u_0)(1-u_1)......(1-u_n)$

لدينا $e^{v_n}=(1-u_n)$ ومنه

$$S_n=e^{v_0}e^{v_1}.....e^{v_n}=e^{v_0+v_1+...v_n}=e^{v_0\frac{2^{n+1}-1}{2-1}}=e^{\ln\left(\frac{7}{8}\right)\left(2^{n+1}-1\right)}$$

$$S'_n=\ln v_0+\ln v_1+.......+\ln v_n$$
$$=\ln\left[v_0\times v_1\times....\times v_n\right]$$

لدينا $v_n=\ln\left(\frac{7}{8}\right)2^n$ ومنه

$$S'_n=\ln\left[\ln\left(\frac{7}{8}\right)2^0\times\ln\left(\frac{7}{8}\right)2^1\times...\times\ln\left(\frac{7}{8}\right)2^n\right]$$
$$=\ln\left[\ln\left(\frac{7}{8}\right)\times\ln\left(\frac{7}{8}\right)...\times\ln\left(\frac{7}{8}\right)\times2^0\times2^1\times...2^n\right]$$
$$=\ln\left[\left(\ln\left(\frac{7}{8}\right)\right)^{n+1}\times2^{0+1+2+...+n}\right]$$
$$=\ln\left[\left(\ln\left(\frac{7}{8}\right)\right)^{n+1}\times2^{\frac{n+1}{2}n}\right]$$

انتهى بالتوفيق للجميع

التمرين: -ب-

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x+4}{x+1}$

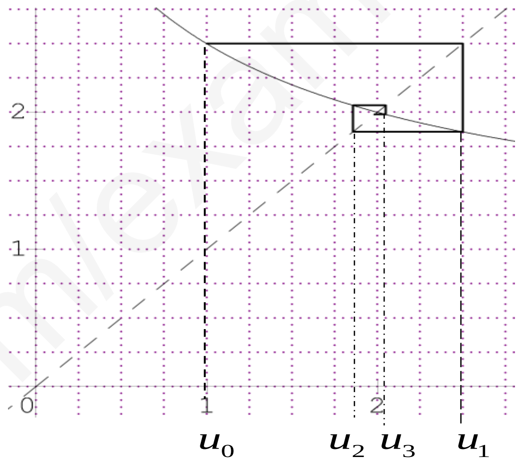
نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases}u_0=\alpha\\ u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$

1- تعيين قيمة α بحيث تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

المتتالية (u_n) ثابتة يكافئ $u_{n+1}=u_n=u_0=\alpha$ ومنه

$\alpha=\dfrac{\alpha+4}{\alpha+1}$ ومنه $\alpha^2-4=0$ ومنه $\alpha=2$ أو $\alpha=-2$

تمثيل على محور الفواصل الحدود



تخمن اتجاه تغير: المتتالية (u_n) غير رتيبة و تقاربة نحو 2

1) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\le u_n\le\dfrac{5}{2}$.

$$u_{n+1}=\frac{u_n+4}{u_n+1}=\frac{u_n+1+3}{u_n+1}=1+\frac{3}{u_n+1}$$

التحقق من أجل $n=0$ $u_0=1$ ومنه $1\le u_0\le\dfrac{5}{2}$

ومنه الخاصية محققة

نفرض صحة الخاصية $P(n)$ من أجل $n\in\mathbb{N}$ أي $1\le u_n\le\dfrac{5}{2}$

نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $1\le u_{n+1}\le\dfrac{5}{2}$

$2\le u_n+1\le\dfrac{7}{2}$ ومنه $\dfrac{2}{7}\le\dfrac{1}{u_n+1}\le\dfrac{1}{2}$ ومنه $\dfrac{6}{7}\le\dfrac{3}{u_n+1}\le\dfrac{3}{2}$

$\dfrac{6}{7}+1\le 1+\dfrac{3}{u_n+1}\le 1+\dfrac{3}{2}$ ومنه $\dfrac{13}{7}\le u_{n+1}\le\dfrac{5}{2}$

ومنه $1\le\dfrac{13}{7}\le u_{n+1}\le\dfrac{5}{2}$

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه $n\in\mathbb{N}$ $1\le u_n\le\dfrac{5}{2}$

- دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n+4}{u_n+1}-u_n=\dfrac{-u_n^2+4}{u_n+1}$

Un	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$Un+1-Un$		$-$	0	$+$	0	$-$	

بما أن $1\le u_n\le\dfrac{5}{2}$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة على المجال $[0;2]$

ومتناقصة على $\left[2;\dfrac{5}{2}\right]$

استنتج أنها متقاربة المتتالية (u_n) متزايدة على المجال $[0;2]$ ومحدودة من الأعلى ومتناقصة على $\left[2;\dfrac{5}{2}\right]$ ومحدودة من الأسفل فإنها متقاربة .

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\dfrac{2-u_n}{u_n+2}$

أ) حساب $2-u_{n+1}$ و $u_{n+1}+2$ ،

$$v_{n+1}=\frac{2-u_{n+1}}{u_{n+1}+2}=\left[2-\frac{u_n+4}{u_n+1}\right]\Big/\left[\frac{u_n+4}{u_n+1}+2\right]$$

$$=\frac{u_n-2}{3u_n+6}=\frac{-1}{3}\times\frac{2-u_n}{u_n+2}=\frac{-1}{3}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=-\dfrac{1}{3}$ وحدها الاول $v_0=\dfrac{1}{3}$

ب) كتاب v_n بدلالة n $v_n=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{-1}{3}\right)^n$

ب) عبر عن u_n بدلالة v_n

$v_n(u_n+2)=2-u_n$ ومنه $v_nu_n+u_n=2-2v_n$

$v_nu_n+2v_n+u_n=2$ $u_n(v_n+1)=2-2v_n$

ومنه $u_n=\dfrac{2-2v_n}{v_n+1}$

كتابة u_n بدلالة n. $u_n=\left[2-2\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{-1}{3}\right)^n\right]\Big/\left[\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{-1}{3}\right)^n+1\right]$

استنتج نهاية المتتالية (u_n)

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=2$. لأن $-1\prec q\prec 1$ ومنه $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$

حساب $S_n=\dfrac{4}{u_0+2}+\dfrac{4}{u_1+2}+....+\dfrac{4}{u_n+2}$

لدينا $v_n=\dfrac{2-u_n}{u_n+2}=-\dfrac{u_n-2}{u_n+2}=-\dfrac{u_n+2-4}{u_n+2}=-1+\dfrac{4}{u_n+2}$

ومنه $v_n=-1+\dfrac{4}{u_n+2}$ ومنه $v_n+1=\dfrac{4}{u_n+2}$ ومنه

$$S_n=v_0+1+v_1+1+...+v_n+1$$
$$=1+1+...+1+v_0+v_1+...+v_n$$
$$=(n+1)+\left[v_0\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}{1+\frac{1}{3}}\right]=(n+1)+\left[-\right]$$

انتهى بالتوفيق والتّميز للجميع

مع تحيات

الأستاذ قشار صالح