إختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول

-1 يحتوي صندوق على 8 كرات سوداء ثلاثة منها تحمل الرقم -1 و ثلاثة تحمل الرقم 0 و اثنتان تحملان الرقم 1 وكرتين حمراوين تحملان الرقمين 1 و 2 ، كل الكرات متماثلة و لا نفرق بينها عند اللمس.

✍ نسحب من الصندوق عشوائيا **ثلاث كرات في آن واحد.**

- أحسب احتمال الحصول على كرتين سوداوين على الاقل.

✍ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب جداء الأرقام المسجلة على الكرات.

- عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله.

-2 نعتبر زهر نرد بستة أوجه أربعة منها تحمل الحرف " β " ووجهان يحملان الحرف " α " .

نقوم بالتجربة الآتية : نرمي زهر النرد اذا تحصلنا على الحرف " β " نسحب على التوالي و **بدون إرجاع** كرتين من الصندوق و إذا تحصلنا على الحرف " α " نسحب على التوالي و **بالإرجاع** كرتين من الصندوق.

- أحسب إحتمال ظهور الحرف " α " علما أن الكرتين المسحوبتين مختلفتين في اللون.

التمرين الثاني

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$

II. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها $z_A=4\sqrt{3}-4i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-\sqrt{3}+i$.

-1 أكتب العدد $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)$ على الشكل الأسي ثم استنتج طبيعة المثلث OAB.

-2 جد z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R الذي مركزه النقطة O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$.

-3 لتكن النقطة G مرجح الجملة $\{(O;-1),(D;1),(B;1)\}$ ذات اللاحقة z_G.

أ) بين أن $z_G=4\sqrt{3}+6i$ ثم علم النقط A، B، C، D و G.

ب) بين أن النقط C، D، G في استقامية.

ج) حدد طبيعة الرباعي $OBGD$.

-4 عين (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $|z|=|z-z_B|$

-5 عين (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MO}\right)\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}-2\overrightarrow{MO}\right)=0$

التمرين الثالث

I. لتكن الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2-2+\ln x$.

-1 أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

-2 بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد $1.31<\alpha<1.32$.

-3 استنتج إشارة $g(x)$.

II. لتكن الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ : $f(x)=x-e+\frac{1-\ln x}{x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. وحدة الطول $2cm$.

1- بين أن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2- بين أنه من أجل كل x من $]0,+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

3- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4- بين أن المستقيم $(\Delta): y=x-e$ مقارب للمنحنى (C_f) ثم ادرس وضعيته مع (C_f).

5- بين أن $f(\alpha)=2\alpha-e-\frac{1}{\alpha}$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

6- أرسم (Δ) و (C_f).

بالتوفيق للجميع

الإجابة النموذجية

التمرين الأول

1- الحالات الممكنة للسحب : $C_{10}^3=120$.

• احتمال الحصول على كرتين سوداوين على الأقل :

$$P(A)=\frac{C_8^2\times C_2^1+C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{112}{120}=\frac{14}{15}$$

• قيم المتغير العشوائي X : $X\in\{-2;-1;0;1;2\}$.

• قانون الاحتمال :

$$P(X=-2)=\frac{C_3^1\times C_3^1\times C_1^1}{120}=\frac{9}{120}$$

$$P(X=-1)=\frac{C_3^1\times C_3^2+C_3^3}{120}=\frac{10}{120}$$

$$P(X=0)=\frac{C_3^1\times C_7^2+C_3^2\times C_7^1+C_3^3}{120}=\frac{85}{120}$$

$$P(X=1)=\frac{C_3^2\times C_3^1+C_3^3}{120}=\frac{10}{120}$$

$$P(X=2)=\frac{C_3^2\times C_1^1+C_3^2\times C_1^1}{120}=\frac{6}{120}$$

اذن :

X	-2	-1	0	1	2
$P(X=X_i)$	$\frac{9}{120}$	$\frac{10}{120}$	$\frac{85}{120}$	$\frac{10}{120}$	$\frac{6}{120}$

-2

إحتمال " ظهور الحرف α علما أن الكرتين مختلفتين في اللون"

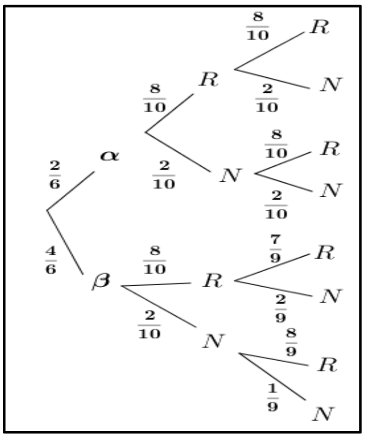
نضع " M: حادثة ظهور الحرف α " و " D: حادثة الكرتين مختلفتين في اللون"

لدينا $P(D)=\frac{2}{6}\times\frac{2\times8^1\times2^1}{10^2}+\frac{4}{6}\times\frac{2A_8^1\times A_2^1}{A_{10}^2}=\frac{232}{675}$

و $P(D\cap M)=\frac{2}{6}\times2\times\frac{8^1\times2^1}{10^2}=\frac{8}{75}$

اذن $P_D(M)=\frac{P(D\cap M)}{P(D)}=\frac{\frac{8}{75}}{\frac{232}{675}}=\frac{9}{29}$

يمكن استعمال شجرة الإحتمالات



التمرين الثاني

I. حل المعادلة : $z^2-8\sqrt3 z+64=0$

لدينا $\Delta=-64=(8i)^2$ ومنه $z_1=4\sqrt3-4i$ أو $z_2=4\sqrt3+4i$

اذن مجموعة الحلول هي $S=\{4\sqrt3-4i\,;4\sqrt3+4i\}$

II. 1.كتابة العدد $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)$ على الشكل الأسي :

$$\frac{z_B}{z_A}=\frac{4\sqrt3+4i}{4\sqrt3-4i}=\frac{(4\sqrt3+4i)(4\sqrt3+4i)}{(4\sqrt3-4i)(4\sqrt3+4i)}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt3}{2}$$

ومنه : $\left|\frac{z_B}{z_A}\right|=\sqrt{\left(\frac12\right)^2+\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^2}=1$ و

$$\begin{cases}\cos\theta=\frac{\frac12}{1}=\frac12\\ \sin\theta=\frac{\frac{\sqrt3}{2}}{1}=\frac{\sqrt3}{2}\end{cases}\rangle\ \theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi/\ k\in\mathbb{Z}$$

اذن $\frac{z_B}{z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

• طبيعة المثلث OAB : لدينا $\left|\frac{z_B-z_o}{z_A-z_o}\right|=1$ و $arg\left(\frac{z_B-z_o}{z_A-z_o}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi/\ k\in\mathbb{Z}$ ومنه المثلث OAB متقايس الأضلاع.

2- ايجاد z_D : لدينا العبارة المركبة للدوران هي :

$(z'-z_o)=e^{-i\frac{\pi}{3}}(z-z_o)$ تكافئ $z'=e^{-i\frac{\pi}{3}}z$

تكافئ $z'=\left(\frac12-i\frac{\sqrt3}{2}\right)z$ و بما أن D صورة النقطة C

فإن : $z_D=\left(\frac12-i\frac{\sqrt3}{2}\right)z_C$ تكافئ

$$z_D=\left(\frac12-i\frac{\sqrt3}{2}\right)\left(-\sqrt3+i\right)=2i$$

3- أ) تبيين أن : $z_G=4\sqrt3+6i$:

$$z_G=\frac{-z_o+z_D+z_B}{-1+1+1}=\frac{0+2i+4\sqrt3+4i}{1}=4\sqrt3+6i$$

• تعليل النقط :

ب) تبيين أن النقط C، D، G في استقامية :

طريقة ① : نثبت أن $\vec{CD}//\vec{CG}$ لدينا $\vec{CG}\left(5\sqrt3;5\right)$ و $\vec{CD}\left(\sqrt3;1\right)$ ، $\vec{CD}//\vec{CG}$ معناه $\sqrt3\times5-1\times\sqrt3=0$ محققة

و بالتالي النقط C، D، G في استقامية.

طريقة ② : نبين أن $\frac{z_G-z_C}{z_D-z_C}=k\in\mathbb{R}$ ، لدينا $\frac{z_G-z_C}{z_D-z_C}=5$ و بالتالي النقط C، D، G في استقامية.

ج) طبيعة الرباعي $OBGD$: متوازي الأضلاع ،

التبرير : $z_{\overrightarrow{OB}}=(z_B-z_O)=4\sqrt3+4i=z_{\overrightarrow{DG}}$.

4- تعيين (Γ_1) : لدينا $|z|=|z-z_B|$ تكافئ $|z-z_o|=|z-z_B|$ تكافئ $MO=MB$ اذن مجموعة النقط هي محور القطعة $[OB]$.

5- تعيين (Γ_2) :

$(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MO})(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}-2\overrightarrow{MO})=0$ تكافئ

$(\overrightarrow{MG})(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+2\overrightarrow{OM})=0$ تكافئ

$(\overrightarrow{MG})(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MD})=0$ تكافئ

$(\overrightarrow{MG})(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})=0$ أي $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{OG}=0$

اذن مجموعة النقط هي المستقيم العمودي على المستقيم (OG) في النقطة G أي الذي يشمل G و $\overrightarrow{OG}$ ناظما له.

التمرين الثالث

I. 1-دراسة اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$: $g'(x)=2x+\frac{1}{x}$ و

بما أن $x>0$ فإن $g'(x)>0$.

• جدول تغيراتها :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2- تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد :

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[1.31;1.32]$

و $\begin{cases}g(1.32)\approx 0.02\\g(1.32)\approx -0.01\end{cases}$ أي $g(1.32)<0<g(1.32)$ فإنه حسب

مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد

$1.31<\alpha<1.32$.

3- استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II. 1-تبيين أن $\lim_{\substack{x\to 0\\>}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\>}} \underbrace{x}_{0}-e+\underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty}\underbrace{\left(1-\overbrace{\ln x}^{-\infty}\right)}_{+\infty}=+\infty$ ،

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{+\infty}-e+\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}-\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{0}=+\infty$

2- دراسة اتجاه تغير الدالة f : الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=1-\frac{\frac{1}{x}\times x-1\times\ln x}{x^2}=\frac{x^2-2+\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$. إذن الدالة متناقصة تماما على المجال $]0;\alpha]$ و متزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

• جدول تغيراتها :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

4- المستقيم $y=x-e$ مقارب لـ (C_f) معناه

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-e)]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)=0$ ومنه

المستقيم (Δ) مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

• **دراسة الوضع النسبي** :ندرس إشارة الفرق

$f(x)-(x-e)=\frac{1-\ln x}{x}$ ومنه من أجل كل x من

$]0;+\infty[$ لدينا : $\frac{1-\ln x}{x}=0$ يكافئ $\begin{cases}1-\ln x=0\\x\neq 0\end{cases}$ أي

إذن $x=e$:

☒ (C_f) فوق (Δ) في المجال $]0;e]$ و (C_f) تحت (Δ) في المجال $[e;+\infty[$.

☒ (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(e;0)$.

5-تبيين أن $f(\alpha)=2\alpha-e-\frac{1}{\alpha}$: لدينا $g(\alpha)=\alpha^2-2+\ln\alpha=0$

أي $\ln\alpha=2-\alpha^2$ ولدينا من جهة أخرى $f(\alpha)=\alpha-e+\frac{1-\ln\alpha}{\alpha}$

ومنه :

$$f(\alpha)=\alpha-e+\frac{1-(2-\alpha^2)}{\alpha}=\alpha-e-\frac{1}{\alpha}+\frac{\alpha^2}{\alpha}=2\alpha-e-\frac{1}{\alpha}$$

• **استنتاج حصر لـ** $f(\alpha)$:لدينا $1.31<\alpha<1.32$ أي

$\begin{cases}-0.1<2\alpha-e<-0.08\\-0.76<\frac{-1}{\alpha}<-0.75\end{cases}$ إذن $-0.86<f(\alpha)<-0.83$.

6-رسم (Δ) و (C_f) :