اختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

المستوى: ثالثة "تقني رياضي ، علوم تجريبيّة"　　　　المدّة: ساعتان

التّمرين الأوّل:

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = \dfrac{8u_n - 6}{u_n + 1} \end{cases}$ حيث α عدد حقيقي يختلف عن 1 .

1) أ) برهن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n \neq 1$.

ب) عيّن قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2) نفرض في كل مايلي $u_0 = 8$.

أ) تحقق أن: $u_{n+1} = 8 - \dfrac{14}{u_n + 1}$. ثم برهن بالتراجع أن : $6 \leq u_n \leq 8$.

ب) أثبت أن (u_n) متتالية متناقصة تماما .

ج) إستنتج أن (u_n) متتالية متقاربة نحو عدد l يحقق: $l^2 - 7l + 6 = 0$ ثم عيّن نهايتها .

3) نعتبر الدّالة f المعرفة على $[1;8]$ كمايلي : $f(x) = \dfrac{8x-6}{x+1}$.

أ) عيّن إتجاه تغير الدّالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

ب) أدرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y = x$ ثم أنشئ تمثيليهما البيانيين في معلم متعامد ومتجانس $(O.\vec{i};\vec{j})$.

ج) مثل على حامل محور الفواصل u_0 ، u_1 و u_2 .

د) برهن بالتراجع أنه من أجل n من $\mathbb{N}$: $u_n = 1 - \dfrac{5}{\left(\dfrac{2}{7}\right)^{n+1} - 1}$.

4) نعرف المتتالية (L_n) من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $L_n = \dfrac{u_n - 6}{u_n - 1}$.

أ) برهن أن (L_n) متتالية هندسية يطلب إعطاء عبارة حدها العام .

ب) أحسب بدلالة n مايلي :

$$S_n = L_0 + L_1 + \dots + L_n$$

$$S_n' = \frac{1}{u_0 - 1} + \frac{1}{u_1 - 1} + \dots + \frac{1}{u_n - 1}$$

$$P_n = L_0^{2022} \times L_1^{2022} \times \dots \times L_n^{2022}$$

التّمرين الثاني:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O.\vec{i};\vec{j})$. وحدة الطول $(2cm)$

I. لتكن الدّالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}-\ln(e^x+1)$

1) بيّن أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$. ثم أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ وفسر النتيجة بيانيا .

2) بيّن أن الدّالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها .

3) إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. لتكن الدّالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{-x}.\ln(e^x+1)$

1) أحسب $f'(x)$ وأكتبها بدلالة $g(x)$. مستنتجا إتجاه تغير الدّالة f.

2) بيّن أن المستقيمين $y=1$ و $y=0$ مقاربين أفقيين للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ و $+\infty$ على الترتيب

3) شكل جدول تغيرات الدّالة f .

4) أنشئ التمثيل البياني للدّالة f . ثم ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد إشارة حلول المعادلة :

$$\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)=-x+e^{x+m}$$

III. لتكن الدّالة K المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $K(x)=f(\ln x)$ و (C_K) تمثيلها البياني

1) بيّن أنه من أجل $x>0$: $K'(x)=\dfrac{1}{x^2}g(\ln x)$.

2) أدرس إشارة $K'(x)$ ثم شكل جدول تغيراتها .

التّمرين الثالث:

f دالة معرفة على $]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)$

1) α عدد حقيقي .بيّن أن الدّالة : $x\to(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$ هي دالة أصلية للدّالة: $\ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$.

2) تحقق أن : $\dfrac{x-1}{x-2}=1+\dfrac{1}{x-2}$. ثم عيّن دالة أصلية للدّالة f على المجال $]2;+\infty[$.

بالتوفيق

للأساتذة

قرايدية أمير و ودي كريمة