



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:
الموضوع الأول

التمرين الأول : 05 نقاط

- (1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x; y)$ التالية : $2021x - 1442y = 11$ حيث x و y عددان صحيحان .
أ) بين أن العددين 2021 و 1442 أوليان فيما بينهما ، ثم استنتج أن المعادلة (E) تقبل حولا في $\mathbb{Z}^2$.
ب) باستعمال خوارزمية إقليدس عين $(x_0; y_0)$ حلا خاصا للمعادلة (E) ، ثم حل المعادلة (E) في $\mathbb{Z}^2$.
ج) عين جميع الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق $|y - x - 581| \leq 579$
(2) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 5^n و 7^n على 11 .
ب) جد باقي القسمة الإقليدية للعدد $2020^{2022^{1442}}$ على 11 .
ج) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $2 \times 2020^{10n+1} + 3n + 1$ قابلا للقسمة على 11
د) λ عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس 5 كيلي : $22 \dots 222$ حيث 2 مكرر 2020 مرة
- جد باقي قسمة 2λ على 11 .
- عين جميع الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق $2020^{x-1} + 2018^y + 9 \equiv 0[11]$

التمرين الثاني : 04 نقاط

- (1) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 \in]0; 1[$ و من أجل كل عدد طبيعي n :
$$u_{n+1} = \frac{1}{\pi} u_n + \frac{\pi-1}{\pi}$$

أ - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $0 \leq u_n \leq 1$
ب - بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة .
(2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $v_0 = \frac{2\pi-1}{2\pi}$ و من أجل كل عدد طبيعي n $v_n = u_n - 1$
أ - برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{\pi}$
ب - أكتب عبارة v_n بدلالة n .
ج - استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 1 + \frac{1}{\pi^n} - \frac{1}{2\pi^{n+1}}$
د - استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
(3) نضع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ، أحسب S_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

يحتوي كيس غير شفاف على كرتين بيضاوين و n كرية سوداء حيث $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$ (الكريات متماثلة لانميز بينها باللمس)

(1) نعتبر أن $n = 5$ نسحب عشوائيا من هذا الكيس ثلاث كريات في آن واحد .
نعتبر الحدثين : A : " سحب ثلاث كريات مختلفة اللون " ، B : " سحب كرية بيضاء واحدة على الأكثر "

- أحسب $P(A)$ احتمال الحدث A ثم بين أن : $P(B) = \frac{6}{7}$

(2) نعيد الكيس إلى حالته الابتدائية و نسحب عشوائيا كرتان على التوالي دون إرجاع .

نعرف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة .

(أ) عين قيم المتغير العشوائي X .

(ب) أنقل وأكمل الجدول التالي مع التبرير :

(ج) بين أن الأمل الرياضي $E(X) = \frac{4}{n+2}$

$X = x_i$	...	1	...
$P(X = x_i)$	$\frac{n^2 - n}{(n + 2)(n + 1)}$	...	...

التمرين الرابع : 7 نقاط

I/ g الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$

(1) أ- بين أن الدالة g متناقصة تماما على $[0; +\infty[$

ب - حدد إشارة الدالة g على $[0; +\infty[$

II/ f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة $2cm$)

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا .

ب - تحقق أنه من أجل كل حقيقي x : $f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x} \ln(1 + e^{-x})$

ج - أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا .

(2) أ- أحسب $f'(x)$ ثم عبر عن $f'(x)$ بدلالة $g(e^x)$.

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) أنشئ (C_f) .

III/ F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ و (C_F) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

(1) أ- تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x : $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$

ب- باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب $F(x)$.

(2) أ- تحقق أن : $F(x) = x + 2\ln 2 - f(x) - \ln(1 + e^x)$

ب- أحسب نهايات الدالة F عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ج- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [F(x) - x]$ واستنتج أن (C_F) يقبل مستقيم مقارب (Δ) عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلته .

- (3) شكل جدول تغيرات الدالة F .
- (4) باستعمال إشارة الدالة g ، عين الوضع النسبي لـ (C_F) و (Δ) .
- (5) أنشئ في المعلم السابق المنحنى (C_F) .
- (6) أ- عبر بدلالة العدد e عن مساحة الحيز المستوي المحدد بحامل محور الفواصل والمنحنى (C_f) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = -1$ و $x = 1$
- ب - أعط قيمة مقربة إلى 10^{-2} لهذه المساحة .
- (7) نضع $u_n = \int_{n-1}^n f(x)dx$ مع n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 1
- أ) أحسب المجموع $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$
- ب) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

الموضوع الثاني

التمرين الأول : 4 نقاط (الأسئلة 1 ، 2 و 3 مستقلة فيما بينها)

- (1) نعتبر α عددا طبيعيا أكبر تماما من 5 و n عدد طبيعي يكتب من الشكل $\overline{4452}$ في نظام التعداد ذي الأساس α ويكتب من الشكل $\overline{2020}$ في نظام التعداد ذي الأساس $\alpha + 2$
 أ) بين أن $\alpha(2\alpha^2 - 8\alpha - 21) = 18$
 ب) استنتج قيمة α ، ثم أكتب العدد $2n$ في النظام العشري .
 ج) نفرض أن $\alpha = 6$ ، أكتب العدد $2n$ في النظام ذي الأساس 6 .
 (2) a و b عددان طبيعيين حيث $a > b$ نضع $d = \text{PGCD}(a; b)$
 أ) برهن أن $d = \text{PGCD}(a - b; b)$
 ب) استنتج $\text{PGCD}(437; 323)$ و $\text{PPCM}(437; 323)$
 (3) عين كل الثنائيات $(x; y)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة والتي تحقق $\begin{cases} xy = 24 \\ m^2 + d^2 = 148 \end{cases}$
 حيث $d = \text{PGCD}(x; y)$ و $m = \text{PPCM}(x; y)$

التمرين الثاني : 4 نقاط

- (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n = \int_{-1}^1 \left(\frac{2|x|}{3} + \frac{e^{-2n|x|}}{3} \right) dx$
 (1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n > 0$
 (2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $u_n = 2 \int_0^1 \left(\frac{2x}{3} + \frac{e^{-2nx}}{3} \right) dx$
 (3) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3} \int_0^1 (1 - e^{2x}) (e^{-2(n+1)x}) dx$
 (4) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) وبين أنها متقاربة .
 (5) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الثالث :

- يحتوي كيس U على 9 كريات لانفرق بينهما باللمس، من بينها ثلاثة بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 و اثنان حمراء تحمل الأرقام 2 ، 3 و أربعة سوداء اللون تحمل الأرقام 1 ، 3 ، 3 ، 3 .
 نسحب عشوائيا من الكيس 3 كريات في آن واحد .
 (1) أحسب احتمال الحوادث التالية : E : " الحصول على 3 كريات من نفس اللون "
 F : " الحصول على كرية تحمل على الأكثر رقما فرديا "
 G : " الحصول على 3 كريات تحمل عددا أوليا من كل لون "

(2) نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات الحمراء المتبقية في الكيس
أ - عين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي.

ب - استنتج $E(2022X + 1443)$

(3) نعتبر الآن الكيس الأول U وكيسا آخر V يحوي كرية بيضاء وكرتين حمراوين وثلاث كرات صفراء، نرمي مرة واحدة
زهرة نرد متوازنة مرقمة من 1 إلى 6

- إذا ظهر الرقم 4 نسحب كرية واحدة من الكيس U وإلا فنسحب كرتين في آن واحد من الكيس الثاني V .

أ) نعتبر الحدث B : "سحب كرية بيضاء على الأقل". بين أن $P(B) = \frac{1}{3}$

ب) إذا سحبنا كرية بيضاء على الأقل، ماهو احتمال أن تكون من الكيس الثاني V ؟

التمرين الرابع:

I / الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - (x + 1)^2 e^x$

(1) أ - أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

ب - تحقق أن: $g(0) = 0$ ثم استنتج إشارة الدالة g .

II / الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كيلي: $f(x) = x + 1 - (x^2 + 1) e^x$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة $2cm$)

(1) أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = x + 1 - 4 \left(\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x$

ب - استنتج $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

ج - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = x \left[1 + \frac{1}{x} - \left(x + \frac{1}{x}\right) e^x\right]$

د - بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

(2) أ - بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y = x + 1$ بجوار $-\infty$.

ب - أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم المقارب (Δ).

(3) أ - برر قابلية اشتقاق الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم أحسب f' الدالة المشتقة للدالة f .

ب - أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) - بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما.

(5) أنشئ المنحنى (C_f) و (Δ). نأخذ $f(-3) \approx -2,5$ و $f(-1) \approx -0,7$

(6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي عدد وإشارة حلول المعادلة: $(x^2 + 1) = (1 - m)e^{-x}$

(7) أ - بين أن الدالة $H: x \rightarrow (x - 1)e^x$ دالة أصلية للدالة $h: x \rightarrow xe^x$ على $\mathbb{R}$

ب - بين أن $\int_{-1}^0 xe^x dx = \frac{2}{e} - 1$

ج - باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن: $\int_{-1}^0 (x^2 + 1) e^x dx = 3 \left(1 - \frac{2}{e}\right)$

د - أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f)، المستقيم (Δ)، والمستقيمين

ذو المعادلتين $x = -1$ و $x = 0$