على المترشح ان يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول:(4 نقاط)

يحتوي كيس على خمس كريات حمراء تحمل الأرقام : $2;1;0;-1;-2$ و ثلاث كريات خضراء تحمل الأرقام : $-1;0;1$ و كرتان سوداوان تحملان الرقمين : $-1;0$ (الكريات لا نفرق بينها عند اللمس).

1/ نسحب عشوائيا ودون إرجاع كريتين من هذا الكيس و ليكن الحدثان :

A:"الكريتان المسحوبتان لوناهما مختلفان"، B:"الكريتان المسحوبتان تحمل كل منهما عددا موجبا تماما"

– أحسب $p(A)$ و $p(B)$ ثم بين أن $p(A\cup B)=\frac{32}{45}$.

2/ نعيد الكريات المسحوبة إلى الكيس و نسحب منه كريتين في آن واحد .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة ممكنة العدد الحقيقي $|x-y|$ حيث x و y هما الرقمان اللذان تحملاهما الكريتان المسحوبتان من الكيس.

أ/ عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X ثم أكتب قانون إحتماله .

ب/ أحسب الأمل الرياضي $E(X)$

التمرين الثاني : (4 نقاط)

I / (u_n)متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}\left(u_n^2-u_n+\frac{1}{2}\right)}$

1) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}\left(u_n-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}}$

2) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\geq 1$

3) أدرس رتابة المتتالية (u_n). هل هي متقاربة ؟

II) لتكن (v_n) متتالية المعرفة على كمايلي : $v_n=u_n^2-u_n$

1) بين ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الاول

2) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n و أحسب $\lim\limits_{x\to\infty}u_n$

3) أحسب S_n بدلالة n المجموع حيث: $S_n=\left(u_0-u_0^2\right)+\left(u_1-u_1^2+1\right)+\left(u_2-u_2^2+2\right)+\ldots+\left(u_n-u_n^2+n\right)$

اقلب الورقة

التمرين الثالث:(04 نقاط)

1) أ- ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 7

ب- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=1+5+5^2+5^3+....+5^n$

جـ- استنتج باقي القسمة الاقليدية على 7 للعددين S_{2021} و S_{2022}

2) حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ الجملة : $\begin{cases} 25x-31y=7 \\ pgcd(x,y)=7 \end{cases}$

3) نعتبر في مجموعة الاعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ المعادلة (E) ذات المجهول x : $3x(x+2)\equiv 2[7]$

أ- حل في المجموعة $\mathbb{Z}$ المعادلة (E) .

ب- N عدد طبيعي يكتب $\overline{361}$ في نظام التعداد الذي أساسه α وباقي القسمة الاقليدية للعدد N على 7هو3

عين قيم العدد الطبيعي α ثم تحقق ان العدد 1436 قيمة ممكنة للعدد α .

التمرين الرابع :(08نقاط)

I) نعتبر g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة : $g(x)=x^2-\ln(x^2)$

1 – أدرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها

2 – استنتج انه من اجل كل عدد حقيقي غير معدوم x يكون: $g(x)>0$

II) نعتبر الدالة f العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة : $f(x)=\dfrac{2}{x}+x+\dfrac{\ln(x^2)}{x}$

ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ثم فسر النتيجتين هندسيا .

2) أ- بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$ تكون: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

ب-ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

جـ- أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y=x$ ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

3)أ – تحقق انه من أجل كل x و $-x$ من $\mathbb{R}^*$: $f(x)+f(-x)=0$ ، ماذا تستنتج؟ فسر النتيجة هندسيا.

ب- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0{,}3<\alpha<0{,}4$, ثم استنتج انها تقبل حلا اخر β يطلب تعيين حصرا له.

4)أ- بين ان المنحنى (C_f) يقبل مماسيين (T_1) و (T_2) موازيين للمستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلتيهما.

ب- انشئ كل من (T_1) و (T_2) والمنحنى (C_f)

5) أ- بين ان الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{4}(\ln x^2)^2+2\ln|x|$ هي دالة اصلية للدالة f على $\mathbb{R}^*$.

ب – عين الدالة الاصلية للدالة f والتي تنعدم من اجل $x=1$.

جـ - نعتبر λ عدد حقيقي حيث $\lambda>1$ احسب التكامل $I(\lambda)=\int_1^{\lambda} f(x)dx$

– فسر النتيجة هندسيا ثم احسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} I(\lambda)$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني:

التمرين الأول:(4 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير:

1) لتكن (u_n) متتالية هندسية حيث $u_1 = 2$ وأساسها $\frac{1}{2}$. نعتبر الجداء: $P_n = u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_{n+1}$

أ) $P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2-1}$ ب) $P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{(n+1)(n-2)}{2}}$ ج) $P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n^2+1}{2}}$

2) حلول المعادلة ذات المجهول x التالية $-2\times 3^{2x} + 2\times 3^{x} + 4 = 0$ هي:

أ) $S = \left\{\frac{-1}{\ln 3}; \frac{\ln 2}{\ln 3}\right\}$ ب) $S = \left\{\frac{\ln 2}{\ln 3}\right\}$ ج) $S = \phi$

3) أ) $\int_1^e \ln(x)\, dx = 1$ ب) $\int_1^e \ln(x)\, dx = e+1$ ج) $\int_1^e \ln(x)\, dx = e-1$

4) أ) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = +\infty$ ب) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = 0$ ج) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = 1$

التمرين الثاني:(4 نقاط)

n عدد طبيعي حيث: $n \geq 4$

يحتوي صندوق U على n كرية لا يمكن التمييز بينها في اللمس ،منها 3 حمراء و البقية سوداء . نسحب في آن واحد كريتين .

1) أحسب احتمال الحدثين التاليتين : A: سحب كريتين من نفس اللون . B : سحب كرية حمراء على الأكثر .

2) أحسب احتمال الحدث C: سحب كرية حمراء على الأقل

3) نعيد التجربة و نضيف صندوقين بحيث نرمز لـ U_k للصندوق k $(1 \leq k \leq 3)$ الذي يحتوي على k كرية حمراء و $n-k$ كرية سوداء ، نختار عشوائيا صندوق من الصناديق الثلاثة و نسحب في آن واحد كريتين .

نسمي RR حادثة " الحصول على كريتين حمراويتين" و NN حادثة " الحصول على كريتين سوداويتين"

و RN حادثة " الحصول على كريتين مختلفتين في اللون "

ليكن المتغير X العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكرات الحمراء.

أ) انجز شجرة الإحتمالات

ب) عين مجموعة قيم X .

جـ) أثبت أن: $P(X=1) = \frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$ و $P(X=2) = \frac{8}{3n(n-1)}$.

د) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي .

التمرين الثالث:(4 نقاط)

1. a و b عددان طبيعيان مكتوبان في النظام ذي الأساس ثلاثة على الشكل $a = \overline{201}$ و $b = \overline{100}$

أكتب العددين a و b في النظام العشري .

اقلب الورقة

.2 x ، y عددان صحيحان و (E) المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $ax-by=3$

أ)بين أنه إذاكانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : $x\equiv 0[3]$

ب)إستنتج حلا خاصا $(x_0;y_0)$ حيث $0\leq x_0 \prec 5$. ثم حل المعادلة (E)

.3 نرمز بالرمز d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x;y)$ حل للمعادلة (E) .

أ)ماهي القيم الممكنة للعدد d ؟

ب) بين ان $pgcd(x,y)=pcgd(y,3)$.

ج)عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) حتى يكون $\frac{y}{x}$ كسرا قابلا للإختزال .

4 · (u_n) و (v_n) متتاليتان حسابيتان معرفتان على $\mathbb{N}$: $u_0=2$ ، $u_{n+1}=u_n+19$ و $v_0=5$ ، $v_{n+1}=v_n+9$

– عين كل الثنائيات $(p;q)$ للأعداد الطبيعية التي تحقق $u_p=v_q$ و $|q-p|\leq 20$.

I. التمرين الرابع:(7.5 نقاط)

1) نعتبر الدالة g_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g_n(x)=n(x+1)+e^x$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم

أ– أدرس تغيرات الدالة g_n ثم شكل جدول تغيراتها .

ب– برهن أن المعادلة $g_n(x)=0$ تقبل على $\mathbb{R}$ حلا وحيدا α_n ثم تحقق أن $-2\prec \alpha_n \prec -1$

ج– استنتج حسب قيم x إشارة $g_n(x)$

2) نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث : $f_n(x)=\frac{x e^x}{n+e^x}$ و نسمي (C_n) منحنيها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

أ– أحسب : $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}[f_n(x)-x]$ ثم فسر النتائج بيانيا

ب– برهن انه من أجل كل عدد حقيقي x: $f_n'(x)=\frac{e^x.g_n(n)}{(n+e^x)^2}$

ج–بين أن : $f_n(\alpha_n)=1+\alpha_n$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f_n

3) أ– أدرس وضعية المنحني (C_n) بالنسبة للمستقيم (D) الذي معادلته : $y=x$

ب– أدرس وضعية المنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) ثم أنشئ المنحنيين (C_1) و (C_2)

II. نعتبر التكاملين : $I=\int_{-1}^{0} x e^x dx$ و $U_n=\int_{-1}^{0} f_n(x)dx$

1) أحسب : I ثم برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-1,0]$: $\frac{x e^x}{n+1}\leq\frac{x e^x}{n+e^x}\leq\frac{x e^x}{n}$

2) بين أن المتتالية (U_n) متقاربة و حدد نهايتها

3) نضع : $V_n=U_1+U_2+\cdots\cdots+U_n$

أ– برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي k : $\int_{k+1}^{k+2}\frac{1}{t}dt\leq\frac{1}{k+1}$

ب– استنتج ان $\frac{1}{1+1}+\frac{1}{2+1}+\frac{1}{3+1}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+1}\geq Ln(n+2)-Ln2$

انتهى الموضوع الثاني