الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — ثانوية عقون محند اليزيد– اغيل اعلي ،

مديرية التربية لولاية بجاية — ثانوية عبد المالك فضلاء– تازمالت ،

امتحان بكالوريا تجريبية — و ثانويتي ذبيح شريف و ثيحارقاثين – أقبو

الشعبة : رياضيات — دورة : ماي 2022

اختبار في مادة : الرياضيات — المدة : 4 ساعات ونصف

على المترشح ان يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول:(4 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على ثلاث كريات تحمل الأرقام 2 ، 2 و 3 . و يحتوي صندوق U_2 على تسع كريات منها أربعة خضراء تحمل كل منها الرقم 3 و خمس كريات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 2 ، 3 و 4 . (الكريات لا يمكن التمييز بينها باللمس)

نسحب عشوائيا كرية من الصندوق U_1 و نسجل رقمها و ليكن n .

إذا كان $n=2$: نسحب عشوائيا من الصندوق U_2 كريتين على التوالي من دون إرجاع.

إذا كان $n=3$: نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من الصندوق U_2 .

نعتبر الحدثين التاليين :

A : " الكريات المسحوبة من الصندوق U_2 لها نفس اللون ".

B : " الكريات المسحوبة من الصندوق U_2 تحمل نفس الرقم ".

1) أ) بين أن $P(A)=\frac{19}{54}$ ثم أحسب $P(B)$ احتمال الحدث B .

ب) بين أن $P(A\cap B)=\frac{55}{378}$.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة، عدد الكريات الحمراء المسحوبة من الصندوق U_2.

- عين قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب $E(X)$ أمله الرياضياتي.

التمرين الثاني:(4 نقاط)

1) نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$: $4x-9y=5 \;......(E)$

- بين انه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : $x\equiv 8[9]$ ثم استنتج حلول المعادلة (E)

2) α عدد طبيعي يكتب $\overline{43}$ في نظام التعداد الذي أساسه x و يكتب $\overline{98}$ في النظام التعداد الذي أساسه y حيث $x\le 35$ و $y\le 15$

- عين القيم الممكنة لـ x و y ثم أكتب α في النظام العشري

3) أ) أدرس و حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 4^n على 9

ب) عين الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ حلول المعادلة (E) حيث يكون: $1444^x+4^y+7\equiv 0[9]$.

4) نعتبر العددان الطبيعيان a و b حيث $a=9n+8$ و $b=4n+3$ و ليكن d قاسمهما المشترك الأكبر

- ما هي القيم الممكنة لـ d
- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $d=5$

5) من أجل كل عدد طبيعي n نضع $A=9n^2+17n+8$ و $B=4n^2+7n+3$

- بين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B
- إستنتج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B

اقلب الصفحة

التمرين الثالث:(5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_n=\int_0^1 (1-x)^n e^x dx$

1) احسب u_0 ثم باستعمال التكامل بالتجزئة احسب u_1 .

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n \le e-1$.

ب) اثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة ثم استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

ج) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{1}{n+1}\le u_n \le \frac{e}{n+1}$ ثم استنتج نهاية (u_n).

3) باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن : $u_{n+1}=(n+1)u_n-1$ ثم استنتج قيمة u_2.

4) نضع $A=\int_0^1 (2x^2-3x+1)e^x dx$

أ) عين العددان الحقيقيان α و β بحيث من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $2x^2-3x+1=\alpha(x-1)^2+\beta(x-1)$

ب) استنتج القيمة المضبوطة للعدد الحقيقي A.

التمرين الرابع:(7 نقاط)

I نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x-(x^2+1)e^{-x+1}$

نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب للمعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$

1) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ وبين أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=1+(x-1)^2e^{-x+1}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2) بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$، ثم ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة الى (Δ).

3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث: $1.8\prec\alpha\prec1.9$

4) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f''(x)=-(x-1)(x-3)e^{-x+1}$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينها.

5) أكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1.

6) أحسب $f(0)$ ثم أنشئ (Δ) ، (T) و (C_f).

7) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية: $(E): f(x)=x+m$

II نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n, $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx$

1) بين أن الدالة المعرفة بـ: $G(x)=-(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^{-x+1}$. ثم أحسب I_1.

2) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$ لكل عدد طبيعي غير معدوم n . ثم أحسب I_2.

3) أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما : $x=0$ و $x=1$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(4 نقاط)

يحتوي كيس على $n+8$ كرية لا نفرق بينهما باللمس، 8 كريات بيضاء و n كرية سوداء (n عدد طبيعي أكبر أو يساوي2)

I) نسحب على التوالي كرتين بدون ارجاع الكرية المسحوبة في كل مرة الى الكيس بحيث نربح دينارا من أجل كل كرية بيضاء مسحوبة و نخسر دينارين من أجل كل كرية سوداء مسحوبة .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب قيمة الربح الجبري .

1) ما هي قيم المتغير العشوائي الممكنة.
2) أكتب بدلالة n قانون احتماله.
3) أحسب بدلالة n أمله الرياضياتي.
4) هل توجد قيمة للعدد n تجعل الأمل الرياضياتي معدوما؟ أحسبها.

II) نفرض أننا سحبنا كرتين في آن واحد ، ليكن A_n حادث الحصول على كرتين من نفس اللون .

B_n حادث الحصول على كرتين من لونين مختلفين .

أ) احسب $p(A_n)$ بدلالة n ثم $\lim\limits_{n\to+\infty} p(A_n)$ ، فسر هذه النتيجة.

ب) احسب $p(B_n)$ بدلالة n ثم $\lim\limits_{n\to+\infty} p(B_n)$ ، فسر هذه النتيجة.

التمرين الثاني:(4 نقاط)

α عدد طبيعي حيث $\alpha \geq 6$

1) y عدد طبيعي يكتب $\overline{4452}$ في نظام التعداد ذي الأساس α ويكتب $\overline{2020}$ في نظام التعداد ذي الأساس $\alpha+2$

أ) بين أن α يحقق $\alpha(2\alpha^2-8\alpha-21)=18$ ثم استنتج قيمة العدد α

ب) أكتب العدد $2y$ في نظام التعداد ذي الأساس 6

2) a و b عددان طبيعيان حيث $a>b$. نضع $d=p\gcd(a;b)$

أ) بين أن $d=p\gcd(a-b;b)$

ب) استنتج $p\gcd(437;323)$ و $ppcm(437;323)$

ج) عين كل الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية الغير معدومة والتي تحقق $\begin{cases} xy=24 \\ m^2+d^2=148 \end{cases}$ حيث

$d=p\gcd(x;y)$ و $m=ppcm(x;y)$

التمرين الثالث:(5 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدها الأول $u_0=\frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+3}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{1}{2}\leq u_n<3$

2) اثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة محددا نهايتها

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_{n+1}-3|\leq\frac{2}{5}|u_n-3|$

اقلب الصفحة

4) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3-u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n (3-u_0)$

5) استنتج من جديد نهاية المتتالية (u_n)

- لتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $v_n = n(3-u_n)$

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{4}{5}$

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$

<u>التمرين الرابع:</u>(7 نقاط)

- نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x-e+\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -x+e+\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)$

2) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

3) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D') معادلتاهما : $y = x-e$ و $y = -x+\ln 2+e$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$ على الترتيب . ثم ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيمين المقاربين (D) و (D').

5) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = \frac{1}{2}\ln 2+e$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f) .

6) انشئ (Δ) ، (D) ، (D') و (C_f)

- (D_m) المستقيم الذي معادلته : $y = mx-m\left(e+\frac{\ln 2}{2}\right)+\frac{\ln 2}{2}$ حيث m وسيط حقيقي.

أ) بين أن جميع المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln 2}{2}+e \,;\, \frac{\ln 2}{2}\right)$.

ب) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المستقيم (D_m) و المنحنى (C_f) .

- نضع: $J = \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} \left[f(x)-(x-e)\right]dx$ ، $I_n = \int_0^1 \ln\left(1+X^n\right)dX$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم

أ) فسر هندسيا العدد J واحسب العدد I_1 .

ب) بين أن: $0 \leq I_n \leq \ln 2$

ج) عين اتجاه تغير المتتالية (I_n)ثم استنتج أنها متقاربة.

د) استنتج أنه من أجل كل $X \in]0;+\infty[$: $0 \leq J+I_1 \leq \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}dx-1+\ln 4$ (باستعمال : $\ln(1+X) \leq X$)

ثم اعط حصرا للعدد $J+I_1$.

انتهى الموضوع الثاني