على التلميذ الإجابة على أحد الموضوعين على الخيار

الموضوع الأول:

التمرين الأول(4 ن):

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = \frac{1}{8}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n(2-u_n)$

1) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x(2-x)$

أ) ادرس اتجاه تغير الدالة f

ب) بين أنه إذا كان $x \in]0;1[$ فإن $f(x) \in]0;1[$

2) أ) أحسب كلا من u_1 و u_2

ب) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$

جـ) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = 1 - u_n$

أ) عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n

ب) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

جـ) استنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثم استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

د) عين أصغر عدد طبيعي n يحقق : $u_n > 1 - 10^{-20}$

و) احسب بدلالة n الجداء $p(n)$ حيث : $p(n) = v_0 \times v_1 \times ..... \times v_n$ ، ثم عين $\lim\limits_{n \to +\infty} p(n)$

التمرين الثاني(4 ن):

1) عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 7

2) استنتج باقي قسمة العدد $2020^{1441} + 1962^{1954} + 1954^{1962}$ على 7

3) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n : $2020^{3n+1} + 1962^{3n+1} + 1954^{3n+1} \equiv 0[7]$

4) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $S_n = 1 + 5 + 5^2 + ... + 5^n$

أ) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n، $4S_n = 5^{n+1} - 1$

ب) نعتبر العدد الطبيعي a ، بين أن $4S_n \equiv a[7]$ إذا و فقط إذا كان $S_n \equiv 2a[7]$

جـ) استنتج باقي قسمة S_{2020} على 7

التمرين الثالث(4ن):

يحتوي كيس على ست كرات بيضاء تحمل الأرقام: 0 ؛ 0 ؛ 0 ؛ 1 ؛ 1 ؛ 2

و كرتين سوداوين تحملان الرقمين : 0 ؛ 1 . (الكرات لا نميز بينها باللمس)

1) نسحب من الكيس عشوائيا كرتين على التوالي دون إرجاع

احسب احتمال كلا من الحدثين التاليين

A : الحصول على كرتين من نفس اللون

B : جداء العددين المسجلين على الكرتين المسحوبتين معدوم

2) نسحب الآن كرتين في آن واحد

أ) احسب احتمال الحادثة C : مجموع العددين الذين تحملها الكرتان المسحوبتان عدد أولي

ب) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب ، مجموع الرقمين المسجلين على الكرتين المسحوبتين

*) عين قانون احتمال X ، واحسب أمله الرياضياتي

*) احسب $E\left(X^2\right)$

التمرين الرابع(8 ن):

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة : $g(x)=2x^2+1-\ln|x|$

1) ادرس تغيرات الدالة g

2) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}^*$

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة: $f(x)=2x-2+\dfrac{\ln|x|}{x}$

$\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. الوحدة $2\,cm$

1) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف

2) بين أن من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

3) بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=2x-2$ مقارب للمنحني $\left(C_f\right)$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$

- أدرس الوضعية النسبية للمنحني $\left(C_f\right)$ بالنسبة للمستقيم (Δ)

4) أحسب $f(-x)+f(x)$. ماذا تستنتج بالنسبة للنقطة $\Omega(0,-2)$ ؟

5) بين أن $\left(C_f\right)$ يقبل مماسا (T) يمر من النقطة Ω و يمس $\left(C_f\right)$ في نقطتين A و B يطلب تعيينهما

- أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T)

6) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين أحدهما 1 و الآخر α حيث $-0{,}37<\alpha<-0{,}36$

7) أنشئ كلا من (Δ) ؛ (T) و $\left(C_f\right)$

8) $\left(\Delta_m\right)$ المستقيمات التي معادلاتها : $y=mx-2$ حيث m وسيط حقيقي

أ- بين أن جميع المستقيمات $\left(\Delta_m\right)$ تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها

ب- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=mx-2$

9) λ عدد حقيقي حيث $\lambda>1$

أ- احسب بدلالة λ و بـ cm^2 المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني $\left(C_f\right)$ و المستقيم (Δ)

و المستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=1$ و $x=\lambda$

ب- عين قيمة العدد الحقيقي λ بحيث يكون : $A(\lambda)=\dfrac{1}{2}cm^2$

الموضوع الثاني

التمرين الأول(4,5 ن):

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $u_1=\sqrt{e}$ و من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$

1) أحسب كلا من u_2 ، u_3 و u_4 (تدور النتائج إلى 10^{-2}) ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2) أ) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ يكون $u_n\leq n+3$

ب) بين أن من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $v_n=u_n-n$

بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول ، ثم بين أن من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$:

$$u_n=n+\left(\sqrt{e}-1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $S_n=\left(\frac{2}{3}\right)v_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2v_2+......+\left(\frac{2}{3}\right)^nv_n$ ؛ $S'_n=u_1+u_2+.....+u_n$ و $T_n=\frac{S'_n}{n^2}$

عبر عن S_n و S'_n بدلالة n ثم عين $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n$

التمرين الثاني(4,5 ن):

1) نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $(E)............7x-3y=1$

أ- بين أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا

ب- حل المعادلة (E)

ج- برهن أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (E) فإن العددين : x و y أوليين فيما بينهما

2) ليكن a و b عددين صحيحين يحققان العلاقة : $(E').......7a-3b=29$

أ- ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين : a و b
ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟

ب- عين الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الصحيحة حلول الجملة : $\begin{cases}7a-3b=29\\ d=29\end{cases}$

ج- ليكن m المضاعف المشترك الأصغر للعددين : a و b

حل الجملة : $\begin{cases}7a-3b=29\\ d=29\\ m=1044\end{cases}$

3) حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ الجملة : $\begin{cases}7a-3b=29\\ pgcd(a;b)=1\end{cases}$

التمرين الثالث(4 ن):

عين في كل حالة مما يلي الإجابة الوحيدة الصحيحة مع التبرير :

1) المتتالية العددية $\left(U_n\right)$ المعرفة بـ: $U_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1}=2U_n-n$ حدها العام على $\mathbb{N}$ هو :

أ) $U_n=2^n+n+1$ ب) $U_n=2^n+n+2$ جـ) $U_n=2^n-n+1$

2) $\left(U_n\right)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $2U_{n+1}=U_n+2000$

نعرف على $\mathbb{N}$ المتتالية العددية $\left(V_n\right)$ كما يلي : $V_n=\dfrac{1}{2}U_n-\alpha$ حيث α عدد حقيقي

إن قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية $\left(V_n\right)$ هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{2}$ هي :

أ) $\alpha=1000$ ب) $\alpha=500$ جـ) $\alpha=-500$

3) إن مجموعة حلول المعادلة $ln\left(2e^x-1\right)=2x$ في $\mathbb{R}$ هي :

أ) $S=\{0\}$ ب) $S=\{0,1\}$ جـ) $S=\phi$

4) إن $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(\dfrac{e^x-3}{e^{2x}+7}\right)+x$ تساوي

أ) e ب) 1 جـ) 0

التمرين الرابع (7ن):

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x)=1+(1-x)e^x$

1) ادرس تغيرات الدالة g و شكل جدول تغيراتها

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[0;+\infty[$

3) تحقق أن : $1,27<\alpha<1,28$ ، ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=\dfrac{e^x+x+1}{e^x+1}$

$\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ الوحدة $2\,cm$

1) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ثم فسر النتيجة بيانيا

2) أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب للمنحني $\left(C_f\right)$

3) ادرس وضعية $\left(C_f\right)$ بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') حيث $y=1$ معادلة لـ (Δ')

4) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{\left(e^x+1\right)^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

ب- بين أن $f(\alpha)=\alpha$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

5) أ- أثبت أن $\left(C_f\right)$ يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $-\alpha$

ب- أثبت أن $\left(C_f\right)$ يقبل مماسا (T) في النقطة $M(-\alpha,0)$ موازيا للمستقيم (Δ)

جـ- اكتب معادلة لـ (T)

6) أنشئ (Δ) ، (Δ') ، (T) و $\left(C_f\right)$

7) m وسيط حقيقي ، ناقش حسب قيم m عدد حلول المعادلة : $f(x)=x+f(m)$

تصحيح باك تجريبي في الرياضيات
3 ت ر
الموضوع الأول

التمرين الأول (04 ن)

$u_{n+1}=u_n(2-u_n)$ و $u_0=\frac{1}{8}$

1) $D=\mathbb{R}$; $f(x)=x(2-x)$

أ) من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=-2x+2$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$-2x+2$	$+$	0	$-$

f متزايدة تماما على $]0,1[$

ب) من أجل $x\in]0,1[$

$0<x<1$ و f متزايدة تماما على $]0,1[$

$f(0)<f(x)<f(1)$ أي $0<f(x)<1$

أي $f(x)\in]0,1[$

2) أ) $u_1=u_0(2-u_0)=f(u_0)=\frac{15}{64}$

$u_2=u_1(2-u_1)=f(u_1)=\frac{1655}{4096}$

ب) البرهان بالتراجع أن $0<u_n<1$

$n=0$: $0<u_0=\frac{1}{8}<1$

$P(0)$ صحيحة.

نفرض $P(n)$ صحيحة: $0<u_n<1$

نبرهن صحة $P(n+1)$: $0<u_{n+1}<1$ ؟

$0<u_n<1$ و f متزايدة تماما على $]0,1[$

فإن $f(0)<f(u_n)<f(1)$ أي

$0<u_{n+1}<1$ وهو المطلوب

من أجل كل عدد طبيعي n: $0<u_n<1$

نقول إن (u_n) محدودة

جـ) من أجل كل عدد طبيعي n:

$u_{n+1}-u_n=u_n-u_n^2=u_n(1-u_n)$

$0<u_n<1$ ومنه $-1<-u_n<0$

ومنه $0<1-u_n<1$ إذن

$u_n(1-u_n)>0$ أي $u_{n+1}-u_n>0$

(u_n) متزايدة تماما.

* (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 فهي متقاربة.

3) $v_n=1-u_n$

أ) لدينا

$v_{n+1}=1-u_{n+1}$

$=1-u_n(2-u_n)$

أي $v_{n+1}=1-2u_n+u_n^2$

$=(1-u_n)^2=v_n^2$

ب) البرهان بالتراجع: $v_n=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

$n=0$: $v_0=1-u_0=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

و $v_0=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^0}=\left(\frac{7}{8}\right)^1=\frac{7}{8}$ أي $P(0)$ صحيحة

نفرض $P(n)$ صحيحة: $v_n=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

نبرهن صحة $P(n+1)$: $v_{n+1}=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}}$ ؟

لدينا $v_n=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$ ومنه $v_n^2=\left[\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}\right]^2$

أي $v_n^2=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n\times 2}$ أي $v_n^2=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}}$

و $v_{n+1}=v_n^2$ نجد $v_{n+1}=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}}$

من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

جـ) استنتاج عبارة u_n بدلالة n

$v_n=1-u_n$ تعني $u_n=1-v_n$

$=1-\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}1-\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}=\boxed{1}$; $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=+\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}=0\end{cases}$ $\left(-1<\frac{7}{8}<1\right)$

د) أصغر عدد طبيعي n يحقق $u_n>1-10^{-20}$

تعني $1-\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}>1-10^{-20}$ تعني $\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}<10^{-20}$

تعني $\ln\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}<\ln 10^{-20}$

تعني $2^n\ln\left(\frac{7}{8}\right)<-20\ln10$ تعني $2^n>\frac{-20\ln10}{\ln\frac{7}{8}}$

تعني $\ln 2^n>\ln\left(\frac{-20\ln10}{\ln\frac{7}{8}}\right)$

أي $n\ln2>\ln\left(\frac{-20\ln10}{\ln\frac{7}{8}}\right)$; $n>\frac{\ln\left(\frac{-20\ln10}{\ln 7/8}\right)}{\ln2}$

$n>5,11$ ومنه أصغر عدد طبيعي $n=6$

هـ) $P(n)=v_0\times v_1\times\dots\times v_n$

$=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^0}\times\left(\frac{7}{8}\right)^{2^1}\times\dots\times\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

$=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^0+2^1+\dots+2^n}$

مجموع $n+1$ حد من متتالية هندسية

$=\left(\frac{7}{8}\right)^{1\left(\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\right)}$

$P(n)=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}-1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}P(n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}-1}=0$; $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}2^{n+1}-1=+\infty\\ -1<\frac{7}{8}<1\end{cases}$

التمرين 2 (04)

1) بواقي قسمة 5^n على 7

$5^0\equiv1[7]$ ، $5^1\equiv5[7]$ ، $5^2\equiv4[7]$

$5^3\equiv6[7]$ ، $5^4\equiv2[7]$ ، $5^5\equiv3[7]$

$5^6\equiv1[7]$ البواقي دورية ودورها 6

$n=$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	
$5^n\equiv$	1	5	4	6	2	3	[7]

2) استنتاج باقي قسمة $A=2020^{1441}+1962^{1954}+1954^{1962}$ على 7 لدينا

لدينا $2020\equiv4[7]$ ولدينا من (1) $5^2\equiv4[7]$

والخاصية إذا كان $a\equiv b[n]$ فإن $b\equiv a[n]$

ومنه $4\equiv5^2[7]$ إذن $2020\equiv5^2[7]$

ومنه $2020^{1441}\equiv(5^2)^{1441}[7]$

$\equiv5^{2882}[7]$

و $2882=6(480)+2$ الشكل $6k+2$

إذن $2020^{1441}\equiv4[7]$

$1962\equiv2[7]$ ولدينا من (1) $5^4\equiv2[7]$

ومنه $2\equiv5^4[7]$ إذن $1962\equiv5^4[7]$

إذن $1962^{1954}\equiv(5^4)^{1954}[7]$

$\equiv5^{7816}[7]$

و $7816=6(1302)+4$ الشكل $6k+4$

إذن $1962^{1954}\equiv2[7]$

$1954\equiv1[7]$ ومنه $1954^{1962}\equiv1[7]$

إذن $A\equiv4+2+1[7]$

$\equiv0[7]$

الباقي صفر 0

3) من أجل كل عدد طبيعي n:

$2020^{3n+1}+1962^{3n+1}+1954^{3n+1}\equiv0[7]$ ؟

$2020\equiv5^2[7]$ ومنه $2020^{3n+1}\equiv(5^2)^{3n+1}[7]$

$\equiv5^{6n+2}[7]$

$\equiv4[7]$

$1962\equiv5^4[7]$ ومنه $1962^{3n+1}\equiv(5^4)^{3n+1}[7]$

$\equiv5^{12n+4}[7]$

$\equiv(5^{6n+2})^2[7]$

$\equiv4^2[7]$

$\equiv2[7]$

$1954\equiv1[7]$ ومنه $1954^{3n+1}\equiv1[7]$

إذن $2020^{3n+1}+1962^{3n+1}+1954^{3n+1} \equiv 4+2+1\,[7]$

$\equiv 0\,[7]$

4) من أجل كل عدد طبيعي n :

$S_n = 1+5+5^2+\dots+5^n$ } مجموع $n+1$ حد من متتالية هندسية

$= 1\,\dfrac{5^{n+1}-1}{5-1}$

$S_n = \dfrac{5^{n+1}-1}{4}$

ومنه $4S_n = 5^{n+1}-1$

ب) a عدد حقيقي :

$4S_n \equiv a\,[7]$ إذا وفقط إذا كان $S_n \equiv 2a\,[7]$

1) إذا كان $4S_n \equiv a\,[7]$ فإن $8S_n \equiv 2a\,[7]$

و $8 \equiv 1\,[7]$ فإن $S_n \equiv 2a\,[7]$

2) إذا كان $S_n \equiv 2a\,[7]$ فإن $4S_n \equiv 8a\,[7]$

و $8 \equiv 1\,[7]$ فإن $4S_n \equiv a\,[7]$

نستنتج أن $4S_n \equiv a\,[7]$ إذا وفقط إذا كان $S_n \equiv 2a\,[7]$

ج) استنتاج باقي قسمة S_{2020} على 7 .

لدينا $4S_n = 5^{n+1}-1$

ومنه $4S_{2020} = 5^{2021}-1$

كما $2021 = 6(336)+5$ الشكل $6k+5$

إذن $4S_{2020} \equiv 3-1\,[7]$

$\equiv 2\,[7]$

بما أن $4S_{2020} \equiv 2\,[7]$ فإن $S_{2020} \equiv 4\,[7]$

مستنتجين (ي) الباقي هو : 4

التمرين الثالث 04ن

8] 6 بيضاء ← 2، 1، 1، 0، 0، 0

2 سوداء ← 1، 0

1) سحب كرتين على التوالي دون إرجاع

عدد الحالات $A_8^2 = 56$

حساب الاحتمال

A : نفس اللون

$P(A) = \dfrac{A_6^2 + A_2^2}{56} = \dfrac{4}{7}$

B : جداء العددين المسجلين معدوم

$P(B) = \dfrac{A_4^2 + A_4^1 \times A_4^1 \times 2}{56}$ $\begin{cases} 0\times 0 = 0 \\ 0\times \text{عدد} = 0 \end{cases}$

$= \dfrac{11}{14}$

2) سحب كرتين في آن واحد

عدد الحالات $C_8^2 = 28$

C : مجموع العددين يكون أوليا

$P(C) = \dfrac{C_4^1 \times C_1^1 + C_3^2 + C_3^1 \times C_1^1}{28}$ $\begin{cases} 0+2=2 \\ 1+1=2 \\ 1+2=3 \end{cases}$

$= \dfrac{5}{14}$

ب) X يرفق بكل نتيجة سحب مجموع العددين

قيم X هي : $\{0,1,2,3\}$

قانون احتمال X

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$3/14$	$3/7$	$1/4$	$3/28$

$P(X=0) = \dfrac{C_4^2}{28} = \dfrac{6}{28} = \dfrac{3}{14}$ $\quad 0+0=0$

$P(X=1) = \dfrac{C_4^1 \times C_3^1}{28} = \dfrac{12}{28} = \dfrac{3}{7}$ $\quad 0+1=1$

$P(X=2) = \dfrac{C_4^1 \times C_1^1 + C_3^2}{28} = \dfrac{7}{28}$ $\begin{cases} 0+2=2 \\ 1+1=2 \end{cases}$

$= \dfrac{1}{4}$

$P(X=3) = \dfrac{C_3^1 \times C_1^1}{28} = \dfrac{3}{28}$ $\quad 1+2=3$

الأمل الرياضياتي

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \dfrac{5}{4}$

$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2$

$= \left(0^2 \times \frac{3}{14}\right) + \left(1^2 \times \frac{3}{7}\right) + \left(2^2 \times \frac{1}{4}\right) + \left(3^2 \times \frac{3}{28}\right)$

$E(X^2) = \dfrac{67}{28}$

التمرين الرابع 08ن

I) $g(x) = 2x^2+1-\ln|x|$

$D =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

1) دراسة تغيرات g

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2\left[2+\frac{1}{x^2} - \frac{\ln(-x)}{(-x)^2}\right] = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left[2+\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right] = +\infty$

$\lim_{x\to 0^<} g(x) = \lim_{x\to 0^<} 2x^2+1-\ln|x| = +\infty$

$\lim_{x\to 0^>} g(x) = +\infty$

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$

$g'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \dfrac{4x^2-1}{x} = \dfrac{(2x-1)(2x+1)}{x}$

x	$-\infty$	$-1/2$	0	$1/2$	$+\infty$
$4x^2-1$	+	0 −	‖ −	0 +	
x	−	−	‖ +	+	
$g'(x)$	−	0 +	‖ −	0 +	

g متناقصة تماما على $]-\infty,-\frac{1}{2}]$ و $]0,\frac{1}{2}]$

g متزايدة تماما على $[-\frac{1}{2},0[$ و $[\frac{1}{2},+\infty[$

x	$-\infty$	$-1/2$	0	$1/2$	$+\infty$
$g'(x)$	−	0 +	‖ −	0 +	
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$2{,}19$ ↗ $+\infty$	‖ $+\infty$ ↘	$2{,}19$ ↗	$+\infty$

2) إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	+	‖	+

II) $f(x) = 2x-2+\dfrac{\ln|x|}{x}$

$D =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x-2-\dfrac{\ln(-x)}{(-x)} = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x-2+\dfrac{\ln x}{x} = +\infty$

$\lim_{x\to 0^<} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x\to 0^>} f(x) = -\infty$

$x=0$ معادلة مستقيم موازي لحامل محور التراتيب

2) من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$

$f'(x) = 2 + \dfrac{\frac{1}{x}x - \ln|x|}{x^2}$

$= 2 + \dfrac{1-\ln|x|}{x^2} = \dfrac{2x^2+1-\ln|x|}{x^2}$

أي $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ ، إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

ومنه f متزايدة تماما على $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗ $+\infty$

3) (Δ) معادلته $y=2x-2$

$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)-(2x-2) = \lim_{|x|\to+\infty} \dfrac{\ln|x|}{x} = 0$

(Δ) ذو المعادلة

$y=2x-2$ م م م مائل لـ (C_f)

الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ)

$f(x)-(2x-2) = \dfrac{\ln|x|}{x}$

$\ln|x|=0$ تعني $|x|=1$ تعني

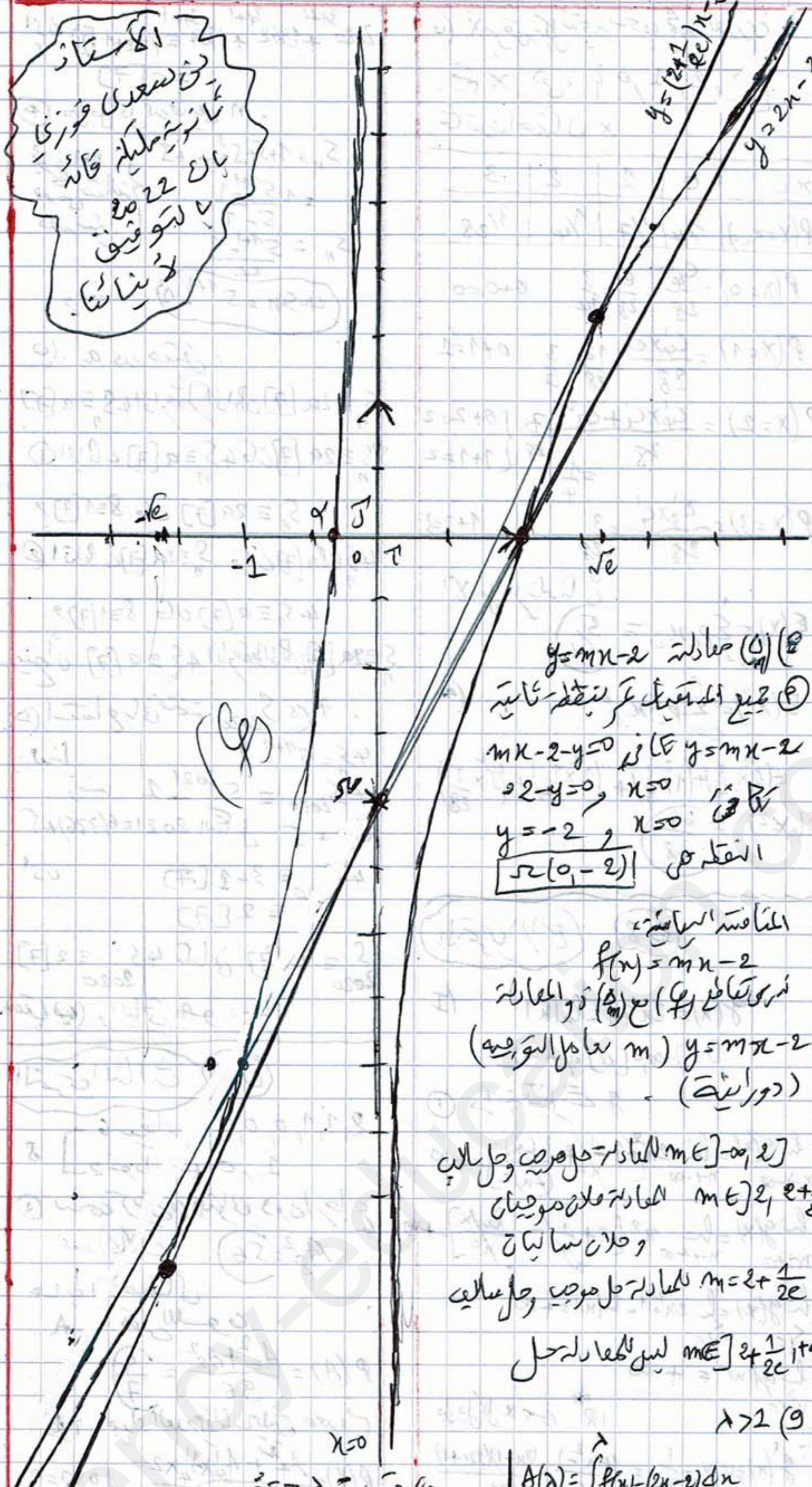
$x=1$ أو $x=-1$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$\ln\|x\|$	+	0 −	‖ −	0 +	
x	−	−	0 +	+	
$\frac{\ln\|x\|}{x}$	−	0 +	‖ −	0 +	
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	

نقطتا التقاطع لـ (C_f) و (Δ) هما

$M_1(-1,-4)$ $\quad M_2(1,0)$

الأستاذ بن سعدي فوزي
ثانوية مليكة قايد
باتنة 2022 مع التوفيق لأبنائنا



من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ،

$$f(-x)+f(x)=\cancel{-2x}-2-\cancel{\frac{\ln|x|}{x}}+\cancel{2x}-2+\cancel{\frac{\ln|x|}{x}}$$
$$=-4$$

إذن النقطة $(0,-2)$ ع مركز تناظر (C_f)

5) (C_f) يقبل مماس عبر بالنقطة Ω

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$
$$-2=f'(x_0)(0-x_0)+f(x_0)$$

لدينا

$$f(x_0)=2x_0-2+\frac{\ln|x_0|}{x_0}$$
$$f'(x_0)=\frac{2x_0^2+1-\ln|x_0|}{x_0^2}$$
$$-2=\frac{2x_0^2+1-\ln|x_0|}{x_0^2}(-x_0)+2x_0-2+\frac{\ln|x_0|}{x_0}$$
$$\cancel{-2}=\frac{-2x_0^2-1+\ln|x_0|}{x_0}+2x_0\cancel{-2}+\frac{\ln|x_0|}{x_0}$$
$$0=\frac{\cancel{-2x_0^2}-1+\ln|x_0|+\cancel{2x_0^2}+\ln|x_0|}{x_0}$$
$$\frac{2\ln|x_0|-1}{x_0}=0$$

يعني $2\ln|x_0|-1=0$ يعني $\ln|x_0|=\frac{1}{2}$

أي $|x_0|=e^{\frac{1}{2}}$ يعني $\begin{cases} x_0=\sqrt{e} \\ x_0=-\sqrt{e} \end{cases}$

النقطتان هما

$M_1\left(\sqrt{e},\, 2\sqrt{e}-2+\frac{\sqrt{e}}{2e}\right)$ $M_2\left(-\sqrt{e},\, -2\sqrt{e}-2+\frac{\sqrt{e}}{2e}\right)$

المعادلة (T) : $f'(\sqrt{e})=2+\frac{1}{2e}$

$$y=\left(2+\frac{1}{2e}\right)(x-\sqrt{e})+2\sqrt{e}-2+\frac{\sqrt{e}}{2e}$$

$$\boxed{y=\left(2+\frac{1}{2e}\right)x-2}$$

x	0	$\sqrt{e}$
y	-2	$1,6$

6) $f(x)=0$ تقبل حلين .

(*) f مستمرة ومتزايدة تماما على $]0,+\infty[$

$f(1)=0$ اذن 1 حل وحيد على $]0,+\infty[$

(*) f مستمرة ومتزايدة تماما على $[-0,37;-0,36]$

$f(-0,36)=0,1179$ $f(-0,37)=-0,052$

$f(-0,37)\times f(-0,36)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد $-0,37<\alpha<-0,36$ يحقق $f(\alpha)=0$

7) الرسم

نقط مساعدة .

x	-3	-2	-1	1	2	3
$f(x)$	$-8,4$	$-6,3$	-4	0	$2,35$	$4,37$

8) معادلة (Δ_m) $y=mx-2$

جميع المستقيمات تمر بنقطة ثابتة

$y=mx-2$ أي $mx-2-y=0$

نجد $x=0$ و $-2-y=0$

$x=0$ و $y=-2$

النقطة هي $\boxed{\Omega(0,-2)}$

المناقشة البيانية :

$f(x)=mx-2$

ندرس تقاطع (C_f) مع (Δ_m) ذو المعادلة $y=mx-2$ (m معامل التوجيه) (دورانية) .

$m\in]-\infty,2]$ للمعادلة حل موجب وحل سالب

$m\in]2,2+\frac{1}{2e}[$ المعادلة حلان موجبان وحلان سالبان

$m=2+\frac{1}{2e}$ للمعادلة حل موجب وحل سالب

$m\in]2+\frac{1}{2e},+\infty[$ ليس للمعادلة حل

9) $\lambda>1$

$$A(\lambda)=\int_1^{\lambda} f(x)-(2x-2)\,dx$$
$$=\int_1^{\lambda}\frac{\ln x}{x}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^{\lambda}$$
$$=\frac{1}{2}(\ln\lambda)^2-\frac{1}{2}(\ln 1)^2$$
$$A(\lambda)=\frac{1}{2}(\ln\lambda)^2\ u.a$$

وبـ cm^2 نجد

$$A(\lambda)=4\times\frac{1}{2}(\ln\lambda)^2=2(\ln\lambda)^2\ cm^2$$

10) تعيين λ حيث

$A(\lambda)=\frac{1}{2}cm^2$ يعني $2(\ln\lambda)^2=\frac{1}{2}$

يعني $(\ln\lambda)^2=\frac{1}{4}$ يعني $\ln\lambda=\frac{1}{2}$

(لأن $\lambda>1$ ، $\ln\lambda>0$) يعني $\lambda=e^{\frac{1}{2}}$

$$\boxed{\lambda=\sqrt{e}}$$

تصحيح الاختبار الثاني في الرياضيات

3 ت ر

الموضوع الثاني.

التمرين 01 (04,5)

$u_1=\sqrt{e}$ و $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$

① $u_2=\frac{2}{3}u_1+\frac{1}{3}+1=2,43$

$u_3=\frac{2}{3}u_2+\frac{2}{3}+1=3,29$

$u_4=\frac{2}{3}u_3+\frac{3}{3}+1=4,19$

التخمين: (u_n) متزايدة

② أ) البرهان بالتراجع: $n\geq 1$: $u_n\leq n+3$

$n=1$ ، $u_1=\sqrt{e}$

$1+3=4$

و $\sqrt{e}\leq 4$ ، $P(1)$ صحيحة

نفرض أن $P(n)$ صحيحة: $u_n\leq n+3$

نبرهن صحة $P(n+1)$: $u_{n+1}\leq n+4$ ؟

$u_n\leq n+3$ ومنه $\frac{2}{3}u_n\leq\frac{2}{3}n+2$

ومنه $\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1\leq\frac{2}{3}n+2+\frac{1}{3}n+1$

ومنه $u_{n+1}\leq n+3$

و $n+3<n+4$

اذن $u_{n+1}\leq n+4$

من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$; $u_n\leq n+3$

ب) من أجل كل $n\geq 1$

$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-u_n$

$=-\frac{1}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$

$=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$

لأن $u_n\leq n+3$ يعني $n+3-u_n\geq 0$

ومنه $u_{n+1}-u_n\geq 0$ أي (u_n) متزايدة

③ من أجل كل $n\geq 1$: $v_n=u_n-n$

(v_n) هندسية يعني $v_{n+1}=v_n\times q$

$v_{n+1}=u_{n+1}-(n+1)$

$=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+\cancel{1}-n-\cancel{1}$

$=\frac{2}{3}u_n-\frac{2}{3}n$

$=\frac{2}{3}(u_n-n)=\frac{2}{3}v_n$

(v_n) هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$، حدها الأول $v_1=u_1-1=\sqrt{e}-1$

نبين أن $u_n=n+(\sqrt{e}-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ ؟

لدينا $v_n=v_1\times q^{n-1}$

$=(\sqrt{e}-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$v_n=u_n-n$ أي $u_n=v_n+n$ ومنه

$\boxed{u_n=n+(\sqrt{e}-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$

④ $S_n=\frac{2}{3}v_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2v_2+\dots+\left(\frac{2}{3}\right)^nv_n$

نضع $w_n=\left(\frac{2}{3}\right)^nv_n$

لدينا $w_{n+1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}v_{n+1}$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\times\frac{2}{3}v_n$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}v_n$

$=\frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^nv_n\right]=\frac{4}{9}w_n$

(w_n) هندسية أساسها $q'=\frac{4}{9}$ حدها الأول $w_1=\frac{2}{3}v_1=\frac{2}{3}(\sqrt{e}-1)$

$S_n=w_1+w_2+\dots+w_n$

$=w_1\left[\frac{1-q'^n}{1-q'}\right]$

$=\frac{2}{3}(\sqrt{e}-1)\left[\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}\right]$

$\boxed{S_n=\frac{6}{5}(\sqrt{e}-1)\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)}$

$S'_n=u_1+u_2+\dots+u_n$ $[u_n=v_n+n]$

$=(v_1+1)+(v_2+2)+\dots+(v_n+n)$

$=(v_1+v_2+\dots+v_n)+(1+2+\dots+n)$ حسابية

$=v_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)+\frac{n(n+1)}{2}$

$=(\sqrt{e}-1)\left(\frac{1-(2/3)^n}{1-2/3}\right)+\frac{n(n+1)}{2}$

$S'_n=3(\sqrt{e}-1)\left(1-(2/3)^n\right)+\frac{n(n+1)}{2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S'_n}{n^2}$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3(\sqrt{e}-1)(1-(2/3)^n)}{n^2}+\frac{n(n+1)}{2n^2}$

$=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

التمرين الثاني (04,5)

① (E) $7y-3x=1$

أ) لدينا $PGCD(7,3)=1$, $1|1$

فإن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

ب) حل المعادلة (E)

لدينا $(1,2)$ حل لـ (E) لأن $7(1)-3(2)=1$ ومنه

$\begin{cases}7x-3y=1\\7(1)-3(2)=1\end{cases}$ أي $7x-3y=7(1)-3(2)$

نجد $7(x-1)=3(y-2)$

$7|3(y-2)$ و $PGCD(7,3)=1$

حسب غوص $7|y-2$ أي $y-2=7k$

ومنه $y=7k+2$

و $7(x-1)=3(7k)$ أي $x-1=3k$ ومنه $x=3k+1$

$S=\{(3k+1,7k+2),k\in\mathbb{Z}\}$

ج) إذا كانت (x,y) حلا لـ (E) هذا يعني $7x-3y=1$، حسب نظرية بيزو يكون x و y أوليين فيما بينهما

② b,a عددان صحيحان كيفيان

(E') — $7a-3b=29$

أ) $PGCD(a,b)=d$

$\begin{cases}d|a\\d|b\end{cases}$ يكن $\begin{cases}d|7a\\d|3b\end{cases}$

ومنه $d|7a-3b$ أي $d|29$

منه $d\in\{1,29\}$

ب) الثنائيات الصحيحة (a,b) حيث $\begin{cases}7a-3b=29\\d=29\end{cases}$

لدينا $d=29$ يعني يوجد a' و b' كيفيان $a=29a'$ و $b=29b'$

حيث $PGCD(a',b')=1$ و

$7(29a')-3(29b')=29$

أي $7a'-3b'=1$

ومن السؤال 1) ب) نجد

$a'=3k+1$, $b'=7k+2$

اذن $a=87k+29$

$b=203k+58$

$S=\{(87k+29,203k+58)/k\in\mathbb{Z}\}$

ج) $PPCM(a,b)=m$

$m=\frac{a\times b}{d}=\frac{29a'\times 29b'}{29}=29a'b'$

$$\begin{cases}7a-3b=29\\ d=29\\ m=1044\end{cases}$$ لدينا الجملة أي

$a'\times b'\times 29=1044$ يعني $\boxed{a'\times b'=36}$

و $7a-3b=29$ تكافئ $\boxed{7a'-3b'=1}$

$a'\times b'=36$ تكافئ $a'=\frac{36}{b'}$ ومنه

$$7\left(\frac{36}{b'}\right)-3b'=1$$

تكافئ $\frac{-3b'^2+252}{b'}=1$

تكافئ $-3b'^2-b'+252=0$

$\Delta=3025$ ، $b'_1=9$ مقبول ، $b'_2=\frac{-28}{3}$ مرفوض

و $b'=9$ تكافئ $a'=4$ ومنه

$a=116$, $b=261$

$S=\{(116,261)\}$

③ حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ $\begin{cases}7a-3b=29\\ PGCD(a,b)=1\end{cases}$

$7a-3b=29$ تكافئ $7a=29+3b$

$7a\equiv 29[3]$ تكافئ $a\equiv 2[3]$

أي $\boxed{a=3\alpha+2}$ ومنه

أي $7(3\alpha+2)=29+3b$

أي $7(3\alpha)-15=3b$

$7\alpha-5=b$

$\boxed{b=7\alpha-5}$ $(\alpha\in\mathbb{Z})$

لدينا $PGCD(a,b)=1$

باستعمال خوارزمية اقليدس لدينا

$PGCD(a,b)=PGCD(b,r)$

$7\alpha-5=2(3\alpha+2)+\alpha-9$

$3\alpha+2=3(\alpha-9)+29$

$PGCD(7\alpha-5,3\alpha+2)=PGCD(\alpha-9,29)$

ولدينا $PGCD(a,b)=1$

يعني $PGCD(\alpha-9,29)=1$

أي $\alpha-9\not\equiv 0[29]$ أي $\alpha\not\equiv 9[29]$

$S=\{(3\alpha+2,7\alpha-5);\ \alpha\in\mathbb{Z},\ \alpha\not\equiv 9[29]\}$

التمرين الثالث ③ (4ن)

① $u_0=2$ و $u_{n+1}=2u_n-n$

برهان بالتراجع أن (P): هو $u_n=2^n+n+1$

$u_{n+1}-2u_n=2^{n+1}+n+1+1-2(2^n+n+1)$

$=\cancel{2^{n+1}}+n+\cancel{2}-\cancel{2^{n+1}}-2n-\cancel{2}$

$=\boxed{-n}$

② $v_n=\frac12 u_n-\alpha$ و $2u_{n+1}=u_n+2000$

تعيين α حتى (P): $\alpha=1000$

$v_{n+1}=\frac12 u_{n+1}-\alpha$

$=\frac12\left(\frac12 u_n+1000\right)-\alpha$

$=\frac12\left[\frac12 u_n+1000-2\alpha\right]$

$=\frac12\left(\frac12 u_n-\alpha+1000-\alpha\right)$

$=\frac12 v_n+\frac{1000-\alpha}{2}$

(v_n) هندسية أساسها $q=\frac12$ بشرط

$1000-\alpha=0$ ومنه $\alpha=1000$

③ تحديد حلول المعادلة

$\ln(2e^x-1)=2x$ هي $S=\{0\}$ (P)

لكي المعادلة معرفة يجب $2e^x-1>0$

أي $2e^x>1$ أي $e^x>\frac12$

أي $x>\ln\frac12$, $D=]\ln\frac12;+\infty[$

$\ln(2e^x-1)=2x$ تكافئ $2e^x-1=e^{2x}$

تكافئ $e^{2x}-2e^x+1=0$ أي

$(e^x-1)^2=0$ تكافئ $e^x-1=0$

أي $e^x=1$ أي $\boxed{x=0}$

④ $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x-3}{e^{2x}+7}\right)+x$

تساوي $\boxed{0}$ (ج)

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x-3}{e^{2x}+7}\right)+x=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x-3}{e^{2x}+7}\right)+\ln(e^x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x-3}{e^{2x}+7}\times e^x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^{2x}-3e^x}{e^{2x}+7}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^{2x}(1-3e^{-x})}{e^{2x}(1+e^{-2x})}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1-3e^{-x}}{1+e^{-2x}}\right)$$

$=\ln 1=0$

التمرين الرابع (7ن)

I) $g(x)=1+(1-x)e^x$ ، $D=]-\infty;+\infty[$

① دراسة تغيرات g

$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}1+e^x-xe^x=1$

$\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$

g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$g'(x)=-e^x+(1-x)e^x=-xe^x$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $-x$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$			
$g(x)$	1	↗	2	↘	0	↘	$-\infty$

② لدينا g مستمرة ومتناقصة تماما على $[0;+\infty[$ و $2\times\lim_{x\to+\infty}g(x)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة

$g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $[0;+\infty[$

③ لدينا $g(1{,}27)=0{,}038$

$g(1{,}28)=-0{,}007$

إذن $g(1{,}27)\times g(1{,}28)<0$

$g(\alpha)=0$ يحقق $1{,}27<\alpha<1{,}28$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II) $f(x)=\frac{e^x+x+2}{e^x+1}$

$D=]-\infty;+\infty[$

① $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1+\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}$

$=\boxed{1}$

يعني $y=1$ معادلة م.أ

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+x+1}{e^x+1}=-\infty$ (2 ب

$\lim_{x\to-\infty}f(x)-(x+1)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+x+1}{e^x+1}-(x+1)$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+x+1-xe^x-e^x-x-1}{e^x+1}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-xe^x}{e^x+1}=0$

إذن (Δ) معادلته $y=x+1$ م.م.مائل لـ (C_f) عند $-\infty$

③ الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

$f(x)-(x+1)=\frac{-xe^x}{e^x+1}$

الإشارة من إشارة $-x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)	

(C_f) يقطع (Δ) في $A(0,1)$

الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ') ذو المعادلة $y=1$

إشارة من إشارة x $\quad f(x)-1=\dfrac{x}{e^x+1}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (Δ')		(C_f) فوق (Δ')	

(C_f) يقطع (Δ') في $A(0,1)$

4) أ) من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\frac{(e^x+1)(e^x+1)-e^x(e^x+x+1)}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{\cancel{e^{2x}}+2e^x+1-\cancel{e^{2x}}-xe^x-e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{1+(1-x)e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

f متزايدة تماما على $]-\infty,\alpha]$

f متناقصة تماما على $[\alpha,+\infty[$

ب) $f(\alpha)=\alpha$ ؟

لدينا $f(\alpha)=\dfrac{e^\alpha+\alpha+1}{e^\alpha+1}$ و $g(\alpha)=0$

يعني $1+(1-\alpha)e^\alpha=0$ أي $(1-\alpha)e^\alpha=-1$

أي $e^\alpha=\dfrac{-1}{1-\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}$

$$f(\alpha)=\frac{\frac{1}{\alpha-1}+\alpha+1}{\frac{1}{\alpha-1}+1}=\frac{\frac{\alpha^2}{\alpha-1}}{\frac{\alpha}{\alpha-1}}=\frac{\alpha^2}{\alpha}=\boxed{\alpha}$$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	α	$\searrow$	1

5) أ) (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $-\alpha$

$f(-\alpha)=\dfrac{e^{-\alpha}-\alpha+1}{e^{-\alpha}+1}$ و $e^\alpha=\dfrac{1}{\alpha-1}$

يعني $\dfrac{1}{e^\alpha}=\alpha-1$

يعني $e^{-\alpha}=\alpha-1$

$$=\frac{\alpha-1-\alpha+1}{\alpha-1+1}=0$$

إذن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $M(-\alpha,0)$

ب) (C_f) يقبل مماسا (T) في $M(-\alpha,0)$ يوازي (Δ)

$$f'(-\alpha)=\frac{g(-\alpha)}{(e^{-\alpha}+1)^2}=\frac{1+(1+\alpha)e^{-\alpha}}{(e^{-\alpha}+1)^2}=\frac{1+(1+\alpha)(\alpha-1)}{(e^{-\alpha}+1)^2}$$

$$f'(-\alpha)=\frac{\alpha^2}{(\alpha-1+1)^2}=\frac{\alpha^2}{\alpha^2}=\boxed{1}$$

(T) مماس (C_f) في $M(-\alpha,0)$ يوازي (Δ) لأن لهما نفس معامل التوجيه: 1

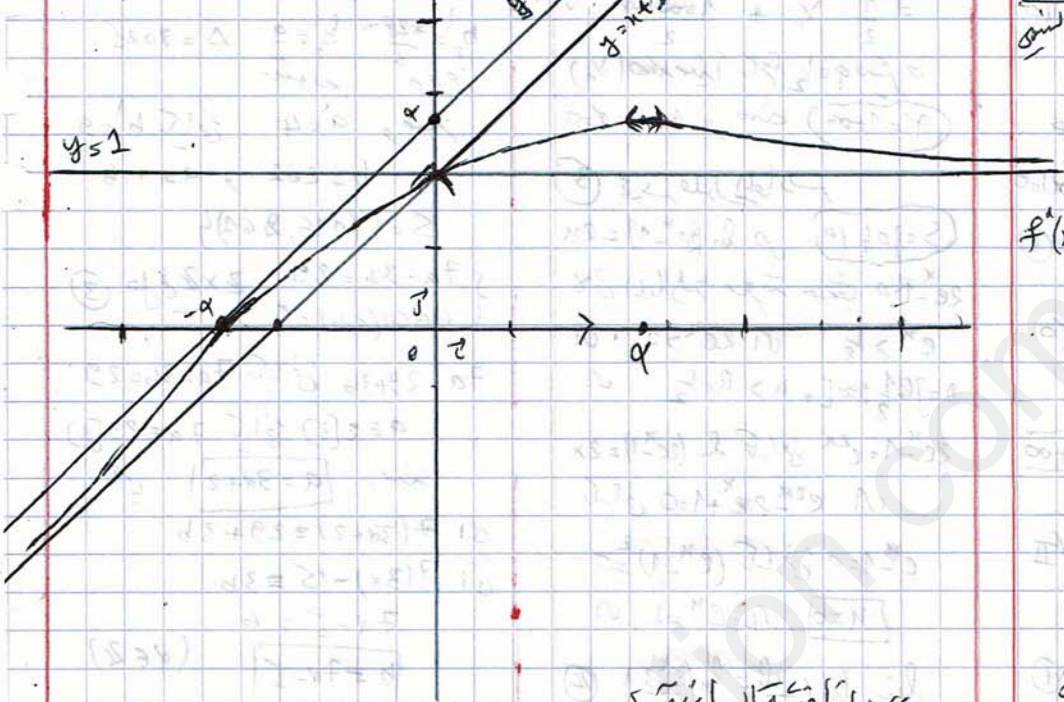
جـ) معادلة لـ (T)

x	$-\alpha$	0
y	0	α

$y=f'(-\alpha)(x+\alpha)+f(-\alpha)=\boxed{x+\alpha}$

$\alpha=1,28$

6) أ) الرسم:



6) المناقشة البيانية:

$f(x)=x+f(m)$

ندرس تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=x+f(m)$ الموازي لكل من (Δ) و (T)

★ $f(m)<1$ يعني $m<0$ للمعادلة حل واحد موجب

★ $f(m)=1$ يعني $m=0$ للمعادلة حل واحد معدوم

★ $1<f(m)<\alpha$ أي $m\in]0,\alpha[\cup]\alpha,+\infty[$ للمعادلة حلين سالبين

★ $f(m)=\alpha$ أي $m=\alpha$ للمعادلة حل مضاعف $x=-\alpha$

الأستاذ: بن لسعدي فوزي
ثانوية ملكية قايد - سطيف -
سنة 2022م
بالتوفيق للأينيا