الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية الوادي
ثانوية بوشوشة – المختلطة –

المستوى : السنة الثالثة
علوم تجريبية
السنة الدراسية 2021 / 2022

اختبار البكالوريا التجريبي في مادة: الرياضيات | المدة :3 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول :

التمرين الأول: (04 نقاط)

من بين الاقتراحات الثلاثة لكل سؤال من الاسئلة جواب واحد صحيح فقط حدده مع التعليل:

1) الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 1 - \frac{2}{e^x+1}$ هي دالة:

أ) فردية ب) زوجية ج) ليست زوجية وليست فردية

2) حل المعادلة التفاضلية: $y' - \ln 3y - \ln 27 = 0$ والذي يحقق $y(0) = 6$ هو

أ) $y(x) = e^x - \ln 3$ ب) $y(x) = 3^{x+2} - 3$ ج) $y(x) = 9e^x - 3$

3) A و B حدثان مستقلان و $P(A) = 0.2$ و $P(A \cup B) = 0.35$ ، احتمال الحدث B هو :

أ) $P(B) = 0.15$ ب) $P(B) = 0.1875$ ج) $P(B) = 0.125$

4) (U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{2}{x}(1 + \ln x)dx$

نضع: $S = U_0 + U_1 + \cdots + U_{36}$ قيمة Sهي.

أ) $S = 2022$ ب) $S = 1444$ ج) $S = 1443$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I. f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1) أدرس تغيّرات الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x) - x = 0$.

3) بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $[1; \sqrt{3}]$ فإنّ: $f(x) \in [1; \sqrt{3}]$.

II. (U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $U_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1} = f(U_n)$.

1) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $1 \leqslant U_n \leqslant \sqrt{3}$

ب) أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (U_n) ، ثمّ استنتج أنها متقاربة وأحسب نهايتها.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $V_n = \dfrac{(U_n)^2}{3 - (U_n)^2}$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب) أكتب V_n بدلالة n ، ثمّ استنتج U_n بدلالة n وأحسب نهاية (U_n) مجددا.

3) أحسب بدلالة n المجموعين S_n و S'_n : $S_n = \dfrac{1}{V_0} + \dfrac{1}{V_1} + \cdots + \dfrac{1}{V_n}$ و $S'_n = \dfrac{1}{(U_0)^2} + \dfrac{1}{(U_1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(U_n)^2}$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 8 كريات لا نفرق بينها باللّمس ، كريتان تحملان الرقم: 0 و أربع كريات تحمل الرقم :2 وكرية تحمل الرقم: 1 وكرية تحمل الرقم: .4

نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من الصندوق.

نعتبر الحدثين:

A : "الكريات المسحوبة مجموع أرقامها يساوي 6".

B: "الكريات المسحوبة جداء أرقامها يساوي 8"

1) أحسب $P(A)$ ، $P(B)$ احتمالي الحدثين A و B على الترتيب.

2) أحسب $P(A\cap B)$ ، هل الحدثين A و B مستقلان؟. برّر إجابتك.

3) استنتج $P_A(B)$ ، ثمّ $P(\overline{A\cap B})$.

4) ليكن المتغيّر العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب جداء أرقام الكريات المسحوبة.

أ) عرّف قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ، ثمّ أحسب $E(X)$ أمله الرياضياتي.

ب) أحسب $P\left(\frac{X^2-16}{X}>0\right)$.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

f الدالة العددية المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{(1+\ln x)^2}{x}$.

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ وبيّن أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، ثمّ فسر النتائج المتحصل عليها بيانيا.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{(1+\ln x)(1-\ln x)}{x^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

جـ) أكتب معادلة المستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

3) g الدالة العددية المعرّفة على $]1;+\infty[$ بـ: $g(x)=1-x+\ln x$.

أ) أدرس اتجاه تغيّر الدالة g ، واستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]1;+\infty[$.

ب) برّر أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]1;+\infty[$: $1+x+\ln x>0$.

جـ) إستنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (T).

4) أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (T).

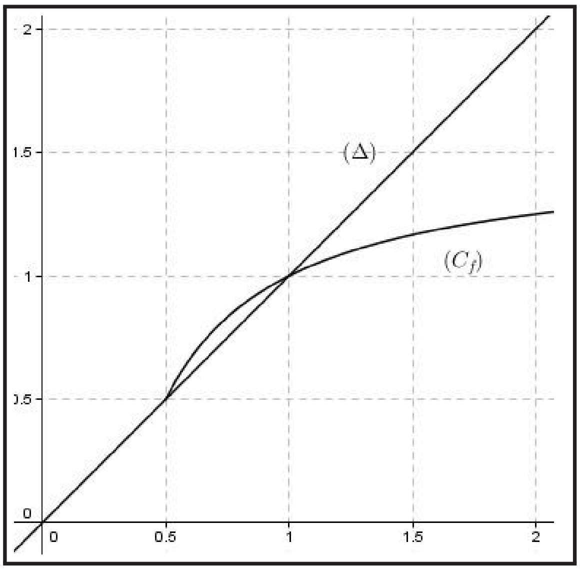
5) m وسيط حقيقي موجب ، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة: $\ln x=\sqrt{mx}-1$.

6) أحسب مساحة الحيّز المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y=x$ ، $x=1$ و $x=e$.

إنتهى الموضوع الأوّل

الموضوع الثاني :

التمرين الأول: (04 نقاط)



f الدالة المعرّفة على المجال $I=]\frac{1}{2};+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{3x-1}{2x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ و (Δ) مستقيم ذو المعادلة $y=x$. **(كما في الشكل المقابل)**

(U_n) المتتالية العددية المعرفة بحدّها الاول $U_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1}=f(U_n)$.

1) أنقل الشكل المقابل، مثّل دون حساب على محور الفواصل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2 و U_3 مبرزا خطوط الإنشاء.

2) خمّن اتجاه تغيّر المتتالية (U_n) وتقاربها.

3) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n>1$.

4) أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (U_n) ، ماذا تستنتج؟.

5) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1}-1\leqslant\frac{1}{2}(U_n-1)$.

ب) استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n-1\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ثمّ استنتج نهاية المتتالية (U_n).

6) (V_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n=\frac{U_n-1}{2U_n-1}$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.

ب) أكتب عبارة U_n بدلالة n.

ج) أحسب بدلالة n المجموع S_n بحيث: $S_n=\frac{V_0-1}{U_0}+\frac{V_1-1}{U_1}+\cdots\cdots+\frac{V_n-1}{U_n}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

من بين الاقتراحات الثلاثة لكل سؤال من الاسئلة جواب واحد صحيح فقط حدّده مع التعليل:

1) منحنى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $g(x)=3x+\dfrac{e^{-x}-2}{e^{-x}-1}$ يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته:

أ) $y=3x$ ب) $y=3x+1$ ج) $y=3x+2$

2) نعتبر العدد الحقيقي $A(\lambda)=\displaystyle\int_1^{\lambda}x\ln x dx$ حيث $\lambda>1$ ، علما أن الدالة: $x\mapsto\dfrac{x^2}{2}\left[\ln x-\dfrac{1}{2}\right]$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto x\ln x$ ، قيمة λ التي من أجلها $A(\lambda)=\dfrac{1}{4}$ هي:

أ) $\lambda=e^{-1}$ ب) $\lambda=\sqrt{e}$ ج) $\lambda=2e$

3) المعادلة: $\log(11x^2-6x+5)=\log(x^2)+1$ تقبل حلان في $\mathbb{R}$ هما:

أ) $S=\{1;-5\}$ ب) $S=\{1;5\}$ ج) $S=\{-1;-5\}$

4) المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_n=2-3\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ هي متتالية

أ) متزايدة تماما ب) متناقصة تماما ج) ليست رتيبة

التمرين الثالث: (04 نقاط)

وحدة إنتاجية يسيرها 20 عامل منهم 8 نساء و 12 رجال ، من بينهم العامل " مراد ".

1) يريد العمال تشكيل لجنة مؤلفة من ثلاثة عمال. ، أحسب احتمال كل حدث من الحوادث الآتية:

A: " أعضاء اللجنة نساء". B: " اللجنة تضم على الأكثر إمرأة ". C: "اللجنة تضم على الأقل إمرأة ".

2) نعتبر المتغيّر العشوائي X الذي يرفق بكل لجنة مشكلة ، عدد الرجال الموجودين فيها.

أ) عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X ، ثمّ أحسب $E(X)$ أمله الرياضياتي.

ب) أحسب $P(X^2 - 2X \leqslant 0)$.

3) يريد العمال تشكيل لجنة مؤلفة من رئيس، نائب و كاتب ، أحسب احتمال كل حدث من الحوادث الآتية :

D: "رئيس اللجنة من الرجال ". E: " رئيس ونائب اللجنة من نفس الجنس ".

F: "العامل " مراد " موجود في اللجنة ".

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (2x+1)e^{-x} + 1$.

1) أحسب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

2) أدرس اتجاه تغيّر الدالة g ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.74; -0.73[$.

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (-2x-3)e^{-x} + x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$

1) أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

2) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل المنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = g(x)$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

4) بيّن أنّ : $f(\alpha) = \alpha + 1 + \dfrac{2}{2\alpha+1}$ ، ثمّ عيّن حصرا للعدد $f(\alpha)$. (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

5) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثييها.

6) أنشئ كلاّ من (Δ) و (C_f). (يعطى $f(-1.65) \approx 0$ و $f(1.4) \approx 0$).

7) أ) عيّن العددين a و b حتّى تكون الدالة $H(x) = (ax+b)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة $h(x) = (-2x-3)e^{-x}$.

ب) أحسب المساحة $A(\lambda)$ للحيّز من المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 0$ و $x = \lambda$ (حيث λ عدد حقيقي موجب تماما).

ج) أحسب: $\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$.

إنتهى الموضوع الثّاني

الإجابة النموذجية عن 6 أسئلة البكالوريا التجريبية

الموضوع الأول

التمرين الأول

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التعليل :

1/ الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=1-\frac{2}{e^x+1}$ هي دالة

الجواب : P/ فردية

التعليل :

لدينا $f(x)=1-\frac{2}{e^x+1}=\frac{e^x-1}{e^x+1}$

* لدينا f متناظرة بالنسبة لـ "0"

أي من أجل $x\in\mathbb{R}$ فإن $-x\in\mathbb{R}$

*

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{1-e^x}{1+e^x}=-\frac{(e^x-1)}{e^x+1}$$

$$=-f(x)$$

ومنه f دالة فردية

2/ حل المعادلة التفاضلية $y'-\ln 3\, y-\ln 27=0$

والتي تحقق $y(0)=6$ هي

الجواب : ب/ $y(x)=3^{x+2}-3$

التعليل :

لدينا $y'-\ln 3\, y=\ln 27$

$$y'=(\ln 3)y+\ln 27$$

هي من الشكل $y'=ay+b$

حلولها من الشكل

$$y(x)=Ce^{ax}-\frac{b}{a}$$

إذا

$$y(x)=Ce^{(\ln 3)x}-\frac{\ln 27}{\ln 3}$$

$$=Ce^{\ln 3^x}-\frac{3\ln 3}{\ln 3}$$

$$\boxed{y(x)=C\times 3^x-3} \quad (1)$$

لدينا $y(0)=6$ أي

$$C\times 3^0-3=6$$

$$C=6+3=9$$

بتعويض في (1) نجد :

$$y(x)=9\times 3^x-3$$

$$=3^2\times 3^x-3$$

$$\boxed{y(x)=3^{x+2}-3}$$

3/ A و B حدثان مستقلان

$P(A\cup B)=0{,}35$ ، $P(A)=0{,}2$

احتمال الحادثة B هو

الجواب : ب/ $P(B)=0{,}1875$

التعليل :

لدينا A و B مستقلان

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

ولدينا $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$$

$$P(A\cap B)-P(A)=P(B)(1-P(A))$$

$$P(B)=\frac{P(A\cap B)-P(A)}{1-P(A)}$$

$$=\frac{0{,}35-0{,}2}{1-0{,}2}=\boxed{0{,}1875}$$

4/ (U_n) متتالية عددية معرفة

على $\mathbb{N}$ بـ: $U_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{2}{x}(1+\ln x)$ ،

المجموع S_n حيث

$$S_n=U_0+U_1+\dots+U_{36}$$

الجواب: ج/ $S_n=1443$

التحليل:

نحسب

$$U_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\frac{2}{x}(1+\ln x)\,dx$$

$$=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left(\frac{2}{x}+2\frac{\ln x}{x}\right)dx$$

$$=\left[2\ln x+(\ln x)^2\right]_{e^n}^{e^{n+1}}$$

$$=2\ln e^{n+1}+(\ln(e^{n+1}))^2-2\ln e^n-(\ln e^n)^2$$

$$=2(n+1)+(n+1)^2-2n-n^2$$

$$=\cancel{2n}+2+\cancel{n^2}+2n+1-\cancel{2n}-\cancel{n^2}$$

$$=2n+3$$

وهي متتالية حسابية أساسها $r=2$ وحدها الأول 3

$$S_n=U_0+U_1+\dots+U_{36}$$

$$S_n=\frac{(n-p+1)}{2}(U_p+U_n)\quad \begin{cases}p=0\\ n=36\end{cases}$$

$$=\frac{(36-0+1)}{2}(U_0+U_{36})$$

$$=\frac{37}{2}(3+75)=\frac{37\times 78}{2}$$

$$=1443$$

التمرين الثاني:

I. $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ ، $D_f=\mathbb{R}$

1/ دراسة تغيرات f وتشكيل جدول تغيراتها.

* النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x}=-2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{|x|}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2$$

* اتجاه تغير f:

f دالة ق. إ على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$$f'(x)=\frac{2\sqrt{x^2+1}-2x\times\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2}$$

$$=\frac{\frac{2(x^2+1)-2x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{(x^2+1)}$$

$$=\frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}>0$$

لأن: $x^2+1>0$ و $\sqrt{x^2+1}>0$

ومنه f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

2/ حل المعادلة $f(x) - x = 0$

$$f(x) - x = 0$$

$$\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - x = 0$$

$$\frac{2x - x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = 0$$

وبالتالي

$$2x - x\sqrt{x^2+1} = 0$$

$$x(2 - \sqrt{x^2+1}) = 0$$

اما $x = 0$ او $2 - \sqrt{x^2+1} = 0$

$$2 - \sqrt{x^2+1} = 0$$

$$\sqrt{x^2+1} = 2$$

$$x^2 + 1 = 4$$

$$x^2 = 3$$

$x = \sqrt{3}$ او $x = -\sqrt{3}$

ومنه حلول المعادلة

$$S = \{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$$

3/ بيان أنه من أجل $x \in [1, \sqrt{3}]$

فإن $f(x) \in [1, \sqrt{3}]$

لدينا $x \in [1, \sqrt{3}]$

أي $1 \leq x \leq \sqrt{3}$

وبما أن f دالة متزايدة على المجال $[1, \sqrt{3}]$ فإن

$$f(1) \leq f(x) \leq f(\sqrt{3})$$

$$1 \leq \frac{2}{\sqrt{2}} \leq f(x) \leq \sqrt{3}$$

أي $1 \leq f(x) \leq \sqrt{3}$

ومنه $f(x) \in [1, \sqrt{3}]$

II $u_0 = 1$ ، $u_{n+1} = f(u_n)$

1/ أ) بيان أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$

$$1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$$

نفرض $P(n): 1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

$P(0): 1 \leq u_0 = 1 \leq \sqrt{3}$ (محققة)

نفرض أن $P(n)$ صحيحة ونثبت صحة $P(n+1)$

لدينا $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

وبما أن f دالة متزايدة على المجال $[1, \sqrt{3}]$ فإن

$$f(1) \leq f(u_n) \leq f(\sqrt{3})$$

$$1 \leq \frac{2}{\sqrt{2}} \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}$$

أي $1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$$

ب) دراسة اتجاه تغير (u_n)

واستنتاج تقاربها وحساب نهاية (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$$

$$= \frac{2u_n - u_n\sqrt{u_n^2+1}}{\sqrt{u_n+1}}$$

$$= \frac{u_n(2 - \sqrt{u_n^2+1})}{\sqrt{u_n^2+1}}$$

إشارة الفرق من إشارة
$2-\sqrt{U_n^2+1}$ لأن $\sqrt{U_n^2+1}>0$
و $1 \leq U_n \leq \sqrt{3}$

لدينا $1 \leq U_n \leq \sqrt{3}$

$$1 \leq U_n^2 \leq 3$$
$$2 \leq U_n^2+1 \leq 4$$
$$\sqrt{2} \leq \sqrt{U_n^2+1} \leq 2$$

بضرب الطرفين بالعدد (-1) نجد

$$-2 \leq -\sqrt{U_n^2+1} \leq -\sqrt{2}$$
$$0 \leq 2-\sqrt{U_n^2+1} \leq 2-\sqrt{2}$$

ومنه $2-\sqrt{U_n^2+1} \geq 0$

ومنه (U_n) متزايدة تماما

ملاحظة

يمكن استخدام جدول إشارة
$2-\sqrt{x^2+1}$

* الاستنتاج:

(U_n) متزايدة تماما ومحدودة
من الأعلى $(U_n \leq \sqrt{3})$ فهي متقاربة

* حساب نهاية (U_n)

لدينا (U_n) متقاربة وبالتالي

$$\lim_{n \to +\infty} U_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} U_n = l$$

$$f(l) = l$$
$$f(l) - l = 0$$

قمنا بحل المعادلة سابقا
وحلولها هي
$$S = \{0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$$

$l=0$ مرفوض لأن $1 \leq U_n \leq \sqrt{3}$

$l=-\sqrt{3}$ مرفوض لأن $1 \leq U_n \leq \sqrt{3}$

$l=\sqrt{3}$ مقبول

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \sqrt{3}$$

/2 $V_n = \dfrac{(U_n)^2}{3-(U_n)^2}$

أ/ بيان أن (V_n) م هندسية بطلب
$V_0 = ?$ و $q = ?$

$$V_{n+1} = \frac{(U_{n+1})^2}{3-(U_{n+1})^2}$$
$$= \frac{\left(\frac{2U_n}{\sqrt{U_n^2+1}}\right)^2}{3-\left(\frac{2U_n}{\sqrt{U_n^2+1}}\right)^2}$$
$$= \frac{\frac{4U_n^2}{U_n^2+1}}{3-\frac{4U_n^2}{U_n^2+1}}$$
$$= \frac{\frac{4U_n^2}{\cancel{U_n^2+1}}}{\frac{3U_n^2+3-4U_n^2}{\cancel{U_n^2+1}}}$$
$$= \frac{4U_n^2}{-U_n^2+3} = 4\left(\frac{U_n^2}{3-U_n^2}\right)$$
$$= 4V_n$$

ومنه (V_n) م هندسية أساسها
$q = 4$

وحدها الأول

$$V_0=\frac{(U_0)^2}{3-(U_0)^2}=\frac{1}{3-1}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

ب/ كتابة V_n بدلالة n واستنتاج U_n بدلالة n وحساب نهاية (U_n)

* لدينا (V_n) م هندسية

$$V_n=V_p\times q^{n-p}$$
$$=V_0\times 4^{n-0}$$

$p=0$, $q=4$, $n=n$

$$\boxed{V_n=\frac{1}{2}(4)^n}$$

* كتابة U_n بدلالة n

لدينا

$$V_n=\frac{U_n^2}{3-U_n^2}$$

$$V_n(3-U_n^2)=U_n^2$$

$$3V_n-U_n^2V_n-U_n^2=0$$

$$U_n^2(-V_n-1)=-3V_n$$

$$U_n^2=\frac{-3V_n}{-V_n-1}$$

$$U_n^2=\frac{3V_n}{V_n+1}$$

$$\left\{\begin{array}{l} U_n=-\sqrt{\dfrac{3V_n}{V_n+1}} \\ U_n=\sqrt{\dfrac{3V_n}{V_n+1}} \end{array}\right.$$

أي مرفوضة لأن $1\leq U_n\leq\sqrt{3}$

ومنه

$$U_n=\sqrt{\frac{3\left(\frac{1}{2}\right)\times 4^n}{\left(\frac{1}{2}\right)\times 4^n+1}}$$

* حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{3\left(\frac{1}{2}\right)4^n}{\frac{1}{2}\times 4^n+1}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{\frac{3}{2}\times \cancel{4^n}}{\cancel{4^n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4^n}\right)}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{3/2}{1/2}}=\sqrt{3}$$

3/ حساب بدلالة n المجموع

$$S_n=\frac{1}{V_0}+\frac{1}{V_1}+\dots+\frac{1}{V_n}$$

لدينا $\left(\frac{1}{V_n}\right)$ م هندسية أساسها $q'=\frac{1}{q}=\frac{1}{4}$ وحدها الأول

$$\frac{1}{V_0}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

$$S_n=\frac{1/V_0}{1-q'}\left(1-(q')^{n-0+1}\right)$$

$$=\frac{2}{1-\frac{1}{4}}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$$

$$=\frac{2}{\frac{3}{4}}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$$

$$\boxed{S_n=\frac{8}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)}$$

$$S'_n = \frac{1}{(U_0)^2} + \frac{1}{(U_1)^2} + \dots + \frac{1}{(U_n)^2}$$

لدينا $V_n = \frac{U_n^2}{3 - U_n^2}$

أي $\frac{1}{V_n} = \frac{3 - U_n^2}{U_n^2}$

$$\frac{1}{V_n} = \frac{3}{U_n^2} - 1$$

$$\frac{1}{V_n} + 1 = \frac{3}{U_n^2}$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{V_n}\right) + \frac{1}{3} = \frac{1}{U_n^2}$$

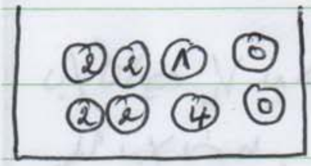
$$S'_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_1} + \dots + \frac{1}{V_n}\right) + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3}}_{(n+1)\text{ مرة}}$$

$$S'_n = \frac{1}{3} S_n + \frac{1}{3}(n+1)$$

$$S'_n = \frac{1}{3}\left(\frac{8}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)\right) + \frac{1}{3}(n+1)$$

$$= \frac{8}{9}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) + \frac{1}{3}(n+1)$$

التمرين الثالث:



التجربة: سحب 3 كريات

الكيفية: في آن واحد

طريقة العد: توفيقة $C_8^3 = 56$

"A" الكريات المسحوبة مجموع أرقامها يساوي 6

"B" " " جداء أرقامها يساوي 8

1/ حساب $P(A)$ و $P(B)$

3 كريات ② أو ⓪، ②، ④

$$P(A) = \frac{C_4^3 + C_4^1 \times C_1^1 \times C_2^1}{C_8^3}$$

$$= \frac{4+8}{56} = \frac{12}{56} = \frac{3}{14}$$

3 كريات ② أو ① ② ④

$$P(B) = \frac{C_4^3 + C_1^1 \times C_4^1 \times C_1^1}{C_8^3}$$

$$= \frac{4+4}{56} = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$$

2/ حساب $P(A \cap B)$ وهل الحدثان A و B مستقلان

$A \cap B$ الكريات المسحوبة جداء أرقامها 8 ومجموعها 6

توجد حالة واحدة وهي 3 كريات ②

$$P(A \cap B) = \frac{C_4^3}{C_8^3} = \frac{4}{56} = \frac{1}{14}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1+\ln x)^2}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+2\ln x+(\ln x)^2}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}+\frac{2\ln x}{x}+\frac{(\ln x)^2}{x}$$

$$=0$$

لأن $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}=0$

و

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{\ln y^2}{y}\right)^2$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{2\ln y}{y}\right)^2 = 0$$

ومنه $y=0$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f)

2/ بين أن ... من أجل x من $]0,+\infty[$: $f'(x)=\frac{(1+\ln x)(1-\ln x)}{x^2}$

f دالة ق ا ع على $]0,+\infty[$

ودالتها المشتقة

$$f'(x) = \frac{2\left(\frac{1}{x}\right)(1+\ln x)x-(1+\ln x)^2}{x^2}$$

$$= \frac{(1+\ln x)\left[2-(1+\ln x)\right]}{x^2}$$

$$= \frac{(1+\ln x)(2-1-\ln x)}{x^2}$$

$$= \frac{(1+\ln x)(1-\ln x)}{x^2}$$

X	$-\infty$	-4		0		4	$+\infty$
X	$-$		$-$	0	$+$		$+$
X^2-16	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{X^2-16}{X}$	$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$

حلول المتراجحة $\frac{X^2-16}{X}>0$ هي

$-4<X<0$ أو $X>4$

$$P\left(\frac{X^2-16}{X}\right) = P(X>4)$$

$$= P(X=8)+P(X=16)$$

$$= \frac{8}{16}+\frac{6}{16} = \frac{14}{16} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

التمرين الرابع:

$$f(x) = \frac{(1+\ln x)^2}{x}$$

$D_f =]0,+\infty[$

1/ حساب $\lim_{x\to0} f(x)$ وبيان أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ وتفسير النتائج

$$*\lim_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0\\>}} \frac{(1+\ln x)^2}{x} = +\infty$$

لأن $\lim_{\substack{x\to0\\>}} (1+\ln x)^2=+\infty$ ،

$x=0$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f)

2/ استنتاج اتجاه تغير f و تشكيل جدول تغيراتها

لدينا $f'(x)=\frac{(1+\ln x)(1-\ln x)}{x^2}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1+\ln x)(1-\ln x)$ لأن $x^2>0$

$1+\ln x=0$

$\ln x=-1$

$\boxed{x=e^{-1}}$

$1-\ln x=0$

$-\ln x=-1$

$\ln x=1$

$\boxed{x=e}$

x	0		e^{-1}		e		$+\infty$
$1+\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$1-\ln x$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

ومنه f متزايدة تماما على المجال $]e^{-1};e[$ ومتناقصة على المجالين $]-\infty;e^{-1}[$ و $]e;+\infty[$

* جدول التغيرات f :

x	0		e^{-1}		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	0

$f(e)=\frac{2}{e}$

$f(e^{-1})=0$

جـ/ كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة "1"

$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$y=1(x-1)+1$ / $f'(1)=1$ ، $f(1)=1$

$y=x-1+1$

$\boxed{(T):\ y=x}$

3/ $g(x)=1-x+\ln x$

$D_g=]1;+\infty[$

* أ/ دراسة اتجاه تغير g و استنتاج إشارة $g(x)$ في $]1;+\infty[$

لدينا g قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ ودالتها المشتقة g'

$g'(x)=-1+\frac{1}{x}$

$=\frac{-x+1}{x}<0$

لأن $x>1$ و $x>1$

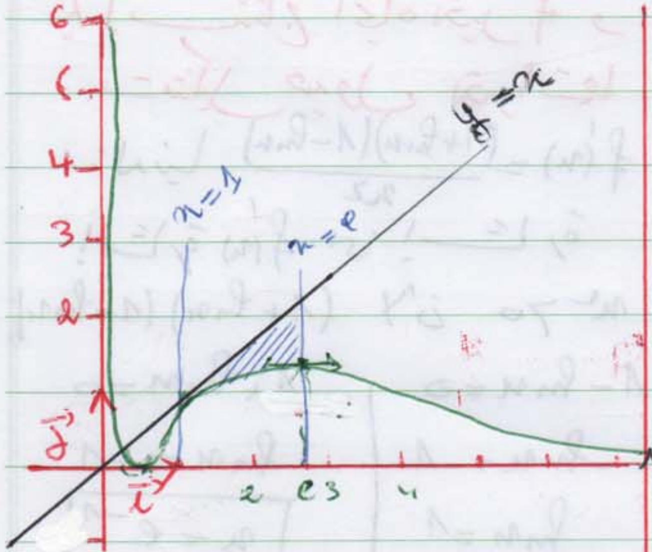
$-x+1<0$

ومنه g متناقصة على $]1;+\infty[$

استنتاج إشارة $g(x)$

لدينا $g(1)=0$ و g دالة متناقصة على $]1;+\infty[$ وبالتالي $g(x)<0$

x	1		$+\infty$
$g(x)$	0	$-$	



ب/ تبرير أنه من أجل $x\in]1,+\infty[$ فإن $1+x+\ln x>0$

لدينا $x>1$

$\ln x>0$ ---- (1)

$x>1$

$x+1>2>0$ ---- (2)

بجمع (1),(2) طرفا لطرف نجد

$$\boxed{x+1+\ln x>0}$$

ج/ استنتاج وضعية (C_g) بالنسبة للمستقيم (T)

$$f(x)-y=\frac{(1+\ln x)^2}{x}-x$$

$$=\frac{(1+\ln x)^2-x^2}{x}$$

$$=\frac{(1-x+\ln x)(1+x+\ln x)}{x}$$

$$=\frac{g(x)(1+x+\ln x)}{x}<0$$

لأن $g(x)\le 0$ و $1+x+\ln x>0$ و $x>0$

ومنه

x	1	$+\infty$
$f(x)-x$	0	$-$
الوضعية	(C_g) (T)	(C_g) تحت (T)

5/ المناقشة البيانية حسب قيم m

عدد حلول المعادلة $\ln x=\sqrt{m}x-1$

لدينا $\ln x=\sqrt{m}x-1$

$\ln x+1=\sqrt{m}x$

$(\ln x+1)^2=mx^2$

$\frac{(\ln x+1)^2}{x}=mx$

$f(x)=mx$

المناقشة تؤول إلى إيجاد فواصل نقط تقاطع (C_g) مع المستقيم الدوار ذو المعادلة $y=mx$

لدينا $y=mx$ يشمل نقطة ثابتة وهي $O(0,0)$

قيم m	المناقشة
$m=0$	حل مضاعف
$0<m<1$	ثلاث حلول متمايزة
$m=1$	حلان أحدهما مضاعف
$m>1$	حل وحيد

6/ حساب مساحة الحيز المحدد بـ (C_g) والمستقيمات $x=e$, $x=1$, $y=x$

$$A=\int_1^e y-f(x)\,dx$$

$$=\int_1^e x-\frac{(1+\ln x)^2}{x}\,dx$$

$$=\int_1^e x-\frac{1+2\ln x+(\ln x)^2}{x}\,dx$$

$$=\int_1^e x-\frac{1}{x}-\frac{2\ln x}{x}-\frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2-\ln x-(\ln x)^2-\frac{1}{3}(\ln x)^3\right]_1^e$$

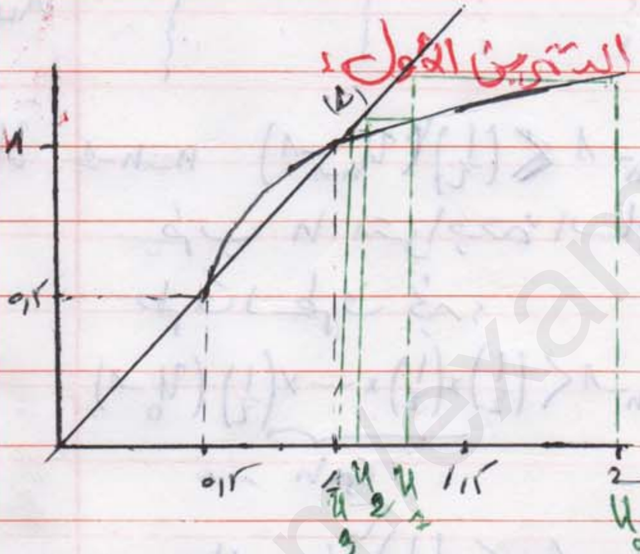
$$=\left(\frac{1}{2}e^2-1-1-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-0-0-0\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{7}{3}\right)-\frac{1}{2}\ u.a$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{17}{6}\ u.a$$

الموضوع الثاني

التمرين الأول:



1/ تمثيل الحدود u_0 , u_1 , u_2 , u_3

2/ تخمين اتجاه تغير (u_n) وتقاربها

لدينا $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$ مرتبة ترتيبا تنازليا ومنه (u_n) متناقصة

ومتقاربة نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع (D) أي $(x=1)$

3/ برهان بالتراجع أنه من أجل كل n طبيعي: $u_n > 1$

نضع $P(n): u_n > 1$

$P(0): u_0 = 2 > 1$ (محققة)

نفرض أن $P(n)$ صحيحة ونثبت صحة $P(n+1)$

$u_n > 1$

وبما أن f متزايدة على المجال $]1;+\infty[$

$f(u_n) > f(1)$

$u_{n+1} > 1$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$

4/ دراسة اتجاه تغير (u_n) والاستنتاج

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n - 1}{2u_n} - u_n$$

$$= \frac{3u_n - 1 - 2u_n^2}{u_n}$$

$$= \frac{-2u_n^2 + 3u_n - 1}{u_n}$$

إشارة الفرق من إشارة $-2u_n^2+3u_n-1$

نضع $x = u_n$

$-2x^2 + 3x - 1$

$\Delta = b^2 - 4ac$ | $a=-2$, $b=3$, $c=-1$

$= 3^2 - 4(-2)(-1)$

$= 1$

$$x_1 = \frac{-3+1}{-2(2)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-3-1}{-2(2)} = \frac{-4}{-4} = 1$$

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$-2x^2+3x-1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

وبما أن $u_n > 1$ فإن $-2u_n^2+3u_n-1<0$ ومنه (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$

* الاستنتاج: (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل $(u_n > 1)$ فهي متقاربة

5/ب) بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}-1 < \frac{1}{2}(U_n-1)$

لدينا

$$U_{n+1}-1 = \frac{3U_n-1}{2U_n}-1$$

$$= \frac{3U_n-1-2U_n}{2U_n}$$

$$= \frac{U_n-1}{2U_n}$$

$$= \frac{1}{2U_n}(U_n-1)$$

ولدينا $U_n > 1$

أي $2U_n > 2$

ومنه $\boxed{\frac{1}{2U_n} < \frac{1}{2}}$ ...(1)

لدينا $U_n-1>0$ بضرب طرفي (1) بالعدد (U_n-1) نجد

$$\frac{1}{2U_n}(U_n-1) < \frac{1}{2}(U_n-1)$$

$$\boxed{U_{n+1}-1 < \frac{1}{2}(U_n-1)}$$

استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n-1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا من العلاقة السابقة ، من أجل

$U_1-1 < \left(\frac{1}{2}\right)(U_0-1)$ $n=0$

$U_2-1 < \left(\frac{1}{2}\right)(U_1-1)$ $n=1$

$U_3-1 < \left(\frac{1}{2}\right)(U_2-1)$ $n=2$

$\vdots$

$U_n-1 < \left(\frac{1}{2}\right)(U_{n-1}-1)$ $n=n-1$

بضرب n متراجحة السابقة طرف لطرف نجد

$$U_n-1 < \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)\times\cdots\times\left(\frac{1}{2}\right)}_{n \text{ مرة}}(U_0-1)$$

$$U_n-1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n(2-1)$$

$$\boxed{U_n-1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

ملاحظة
يمكن برهان بالتراجع ع
العلاقة $U_n-1 < \left(\frac{1}{2}\right)^n$

6/ $V_n = \frac{U_n-1}{2U_n-1}$

أ/ بيان أن (V_n) م هندسية

$V_0 = ?$, $q = ?$

$$V_{n+1} = \frac{3U_{n+1}-1}{2U_{n+1}-1}$$

$$= \frac{\frac{3U_n-1}{2U_n}-1}{2\left(\frac{3U_n-1}{2U_n}\right)-1}$$

$$= \frac{\frac{3U_n-1-2U_n}{2U_n}}{\frac{6U_n-2-2U_n}{2U_n}}$$

$$= \frac{U_n-1}{4U_n-2} = \frac{1}{2}\left(\frac{U_n-1}{2U_n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}V_n$$

ومنه (V_n) م هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول

$$V_0 = \frac{U_0-1}{2U_0-1} = \frac{2-1}{2(2)-1} = \frac{1}{3}$$

ب/ كتابة U_n بدلالة n

* كتابة V_n بدلالة n

(V_n) م هندسية

$$V_n = V_p \times q^{n-p} \qquad \left|\begin{array}{l} p=0 \\ q=\frac{1}{2} \\ n=n \end{array}\right.$$

$$= V_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\boxed{V_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

* لدينا $V_n = \dfrac{U_n-1}{2U_n-1}$

$$V_n(2U_n-1) = U_n-1$$

$$2V_nU_n - V_n = U_n-1$$

$$2V_nU_n - U_n = V_n-1$$

$$(2V_n-1)U_n = V_n-1$$

$$U_n = \frac{V_n-1}{2V_n-1}$$

$$\boxed{U_n = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}}$$

جـ/ حساب المجموع S_n

$$S_n = \frac{V_0-1}{U_0} + \frac{V_1-1}{U_1} + \dots + \frac{V_n-1}{U_n}$$

لدينا مما سبق

$$(2V_n-1)U_n = V_n-1$$

$$\boxed{2V_n-1 = \frac{V_n-1}{U_n}}$$

$$S_n = (2V_0-1)+(2V_1-1)+\dots+(2V_n-1)$$

$$= 2\underbrace{(V_0+V_1+\dots+V_n)}_{\text{م هـ } q=\frac{1}{2}} - \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{\text{مرة } (n+1)}$$

$$= 2\,\frac{V_0}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - (n+1)$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{2}}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - n - 1$$

$$\boxed{S_n = \frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - n - 1}$$

التمرين الثاني:

اختيار الإجابة الصحيحة مع التبرير

1/ منحنى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=\frac{e^{-x}-2}{e^{-x}-1}+3x$ يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $(+\infty)$ معادلته

الجواب: جـ/ $y=3x+2$

التحليل:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-3x=$$

$$\lim_{x\to+\infty} 3x+\frac{e^{-x}-2}{e^{-x}-1}-3x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}-2}{e^{-x}-1}=2$$

ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(3x+2)=0$$

ومنه $y=3x+2$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$

2/ $\lambda>1$, $A(\lambda)=\int_1^\lambda x\ln x\,dx$

قيمة λ حتى $A(\lambda)=\frac{1}{4}$ هي

الجواب: ب/ $\lambda=\sqrt{e}$

التحليل:

$$A(\lambda)=\int_1^\lambda x\ln x\,dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)\right]_1^\lambda$$

$$=\left(\frac{\lambda^2}{2}\left(\ln\lambda-\frac{1}{2}\right)\right)-\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$=\frac{\lambda^2}{2}\left(\ln\lambda-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}$$

حتى يكون $A(\lambda)=\frac{1}{4}$

$$\frac{\lambda^2}{2}\left(\ln\lambda-\frac{1}{2}\right)+\cancel{\frac{1}{4}}=\cancel{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{\lambda^2}{2}\left(\ln\lambda-\frac{1}{2}\right)=0$$

$\frac{\lambda^2}{2}=0$

$\lambda^2=0$

$\lambda=0$

مستحيل لأن $\lambda>1$

$\ln\lambda-\frac{1}{2}=0$

$\ln\lambda=\frac{1}{2}$

$\boxed{\lambda=e^{1/2}}$

ومنه $\boxed{\lambda=\sqrt{e}}$

3/ المعادلة $\log(11x^2-6x+5)=\log x^2+1$ تقبل حلان هما:

الجواب: ب/ $S=\{1,5\}$

التحليل:

$$\log(11x^2-6x+5)=\log x^2+1$$

معرفة على $\mathbb{R}^*$ لأن

$$11x^2-6x+5>0\ ,\ x^2>0$$

$$\log(11x^2-6x+5)=\log x^2+1$$

$$\frac{\ln(11x^2-6x+5)}{\ln 10}=\frac{\ln x^2}{\ln 10}+1$$

$\ln(11x^2-6x+5) = \ln x^2 + \ln 10$

$\ln(11x^2-6x+5) = \ln 10x^2$

$11x^2-6x+5 = 10x^2$

$x^2-6x+5=0$

$\Delta = b^2-4ac$ | $a=1$

$= 36-4(1)(5)$ | $b=-6$

$=16$ | $c=5$

$x_1 = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5$

$x_2 = \frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$S=\{1,5\}$ ومنه

4/ (U_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_n=2-3\left(\frac{1}{4}\right)^n$

هي متتالية :

الجواب ؟ / متزايدة تماما

التعليل :

$U_{n+1}-U_n = \left(2-3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)-\left(2-3\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

$= -3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$= 3\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(-\frac{1}{4}+1\right)$

$= 3\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right)$

$= \frac{9}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n > 0$

ومنه (U_n) متزايدة تماما

التمرين الثالث :

عدد الرجال : 12

عدد النساء : 08

عدد العمال : $20 = 12+8$

التجربة تشكيل لجنة من 03 عمال

المهام غير مذكورة

طريقة العد : توفيقة $C_{20}^3 = 1140$

1/ حساب احتمال الحوادث التالية

"A" أعضاء اللجنة نساء

$P(A) = \frac{C_8^3}{C_{20}^3} = \frac{14}{285}$

"B" اللجنة تضم امرأة على الأكثر

$P(B) = \frac{C_8^1 \times C_{12}^2 + C_{12}^3}{C_{20}^3} = \frac{187}{285}$

"C" اللجنة تضم امرأة على الأقل

$P(C) = \frac{C_8^1 \times C_{12}^2 + C_8^2 \times C_{12}^1 + C_8^3}{C_{20}^3}$

$= \frac{72}{95}$

2/ ليكن X المتغير العشوائي

يرفق بكل لجنة عدد الرجال

المتواجدين في اللجنة

2/ قانون الاحتمال وحساب الأمل الرياضي.

قيم X هي

$$X=\{0,1,2,3\}$$

x_i	0	1	2	3	Σ
$P(X=x_i)$	$\frac{14}{285}$	$\frac{84}{285}$	$\frac{132}{285}$	$\frac{55}{285}$	1
$x_i P_i$	0	$\frac{84}{285}$	$\frac{264}{285}$	$\frac{165}{285}$	

$$P(X=0)=\frac{C_8^3}{C_{20}^3}=\frac{14}{285}$$

$$P(X=1)=\frac{C_{12}^1\times C_8^2}{C_{20}^3}=\frac{28}{95}=\frac{84}{285}$$

$$P(X=2)=\frac{C_{12}^2\times C_8^1}{C_{20}^3}=\frac{44}{95}=\frac{132}{285}$$

$$P(X=3)=\frac{C_{12}^3}{C_{20}^3}=\frac{11}{57}=\frac{55}{285}$$

$$E(X)=\Sigma x_i p_i=\frac{9}{5}$$

3/ التجربة : 03 عمال

المهام : رئيس ، نائب ، كاتب

طريقة السحب ترتيبة $A_{20}^3=6840$

حساب احتمال الحوادث التالية

"D" رئيس اللجنة من الرجال

$$P(D)=\frac{A_{12}^1\times A_{19}^2}{A_{20}^3}=\frac{3}{5}$$

"E" رئيس اللجنة ونائبه من نفس الجنس

$$P(F)=\frac{A_{12}^2\times A_{18}^1+A_8^2\times A_{18}^1}{A_{20}^3}=\frac{3384}{6840}=\frac{47}{95}$$

"F" الحامل "مراد" في اللجنة

$$P(F)=\frac{3\times A_1^1\times A_{19}^2}{A_{20}^3}=\frac{1026}{6840}=\frac{3}{20}$$

التمرين الرابع :

I $g(x)=(2x+1)e^{-x}+1$, $D_g=\mathbb{R}$

1/ حساب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

• $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(2x+1)e^{-x}+1=-\infty$

• $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x+1)e^{-x}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}+\frac{1}{e^x}+1$

$=1$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$

2/ دراسة اتجاه تغير و تشكيل جدول تغيراتها

g دالة ق إ على $\mathbb{R}$ و

$$g'(x)=2e^{-x}-e^{-x}(2x+1)$$
$$=e^{-x}(2-(2x+1))$$
$$=e^{-x}(1-2x)$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $1-2x$

لأن $e^{-x}>0$

$1-2x=0$ أي $2x=1$

$\boxed{x=\frac{1}{2}}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$1-2x$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

ومنه g متناقصة تماما على $[\frac{1}{2};+\infty[$

ومتزايدة تماما على $]-\infty;\frac{1}{2}]$

* جدول تغيرات g

x	$-\infty$	α		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$			$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{\sqrt{e}}+1$	$\searrow$	0

$g(\frac{1}{2})=2e^{-\frac{1}{2}}+1=\frac{2}{\sqrt{e}}+1$

3/ إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث

$-0,74<\alpha<-0,73$

لدينا g دالة مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-0,74;-0,73[$

$g(-0,74)=$,

$g(-0,73)=$

$g(-0,74)\times g(-0,73)<0$ إذن ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد α وحيد تحقق $-0,74<\alpha<-0,73$ تحقق $g(\alpha)=0$

ب/ استنتاج إشارة $g(x)$

من جدول تغيرات الدالة g

ومن $g(\alpha)=0$ ينتج

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II

$f(x)=(-2x-3)e^{-x}+x$

1// حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x-3)e^{-x}+x$

$=\lim\limits_{x\to-\infty} x\left[\frac{-2x-3}{x}e^{-x}+1\right]$

$=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x-3)e^{-x}+x$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x}{e^{x}}-\frac{3}{e^{x}}+x$

$=+\infty$

2/ أ/ تبيان أن $(\Delta): y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y = \lim_{x\to+\infty}(-2x-3)e^{-x}+x-x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(-2x-3)e^{-x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{e^x}-\frac{3}{e^x}=0$$

ومنه $(\Delta): y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

$$f(x)-y=(-2x-3)e^{-x}$$

إشارة الفرق هي إشارة $(-2x-3)$

لأن $e^{-x}>0$

$-2x-3=0$ أي $-2x=3$

$x=-\frac{3}{2}$

x	$-\infty$		$-3/2$		$+\infty$
$-2x-3$		+	0	−	
$f(x)-y$		+	0	−	
الوضعية		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	

3/ أ/ تبيان أن $f'(x)=g(x)$

لدينا f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة

$$f'(x)=-2e^{-x}-e^{-x}(-2x-3)+1$$

$$=e^{-x}(-2-(-2x-3))+1$$

$$=(2x+1)e^{-x}+1$$

$$=g(x)$$

ب/ استنتاج إتجاه تغير f وتشكيل جدول تغيراتها

لدينا $f'(x)=g(x)$

إذا إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		−	0	+	
$f'(x)$		−	0	+	

ومنه f متزايدة تماما على المجال $[\alpha,+\infty[$ ومتناقصة على المجال $]-\infty,\alpha]$

* جدول التغيرات f

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4/ تبيان أن $f(\alpha)=\alpha+1+\frac{2}{2\alpha+1}$

نثبت أن

$$f(\alpha)-(\alpha+1)-\frac{2}{2\alpha+1}=0$$

$$f(\alpha)-\alpha-1-\frac{2}{2\alpha+1}=$$

$$=(-2\alpha-3)e^{-\alpha}+\cancel{\alpha}-\cancel{\alpha}-1-\frac{2}{2\alpha+1}$$

$$=(-2\alpha-3)e^{-\alpha}-\frac{(2\alpha+1)+2}{2\alpha+1}$$

$$=\frac{-(2\alpha+3)(2\alpha+1)e^{-\alpha}-(2\alpha+3)}{2\alpha+1}$$

$$=\frac{-(2\alpha+3)\left[(2\alpha+1)e^{-\alpha}+1\right]}{2\alpha+1}$$

$$=\frac{-(2\alpha+3)\,g(\alpha)}{2\alpha+1}=0$$

حصر لـ $f(\alpha)$

لدينا

$$-0{,}74<\alpha<-0{,}73$$

$$\boxed{0{,}26<\alpha+1<0{,}27}\ -(1)$$

$$-1{,}48<2\alpha<-1{,}46$$

$$-0{,}48<2\alpha+1<-0{,}46$$

$$-2{,}08>\frac{1}{2\alpha+1}>-2{,}17$$

$$-4{,}16>\frac{2}{2\alpha+1}>-4{,}34$$

$$\boxed{-4{,}34<\frac{2}{2\alpha+1}<-4{,}16}\ -(2)$$

بجمع (1) و (2) طرف لطرف نجد

$$-4{,}08<f(\alpha)<-3{,}89$$

5/ تبيان أن (C_g) يقبل نقطة انعطاف w يطلب تعيينها

لدينا f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و

$$f''(x)=g'(x)$$

من الجزء I

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f''(x)=g'(x)$	$+$	0	$-$

ومنه f'' تنعدم عند $x=\frac{1}{2}$ مغيرة إشارتها ومنه (C_g) يقبل نقطة انعطاف هي

$$w\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=(-1-3)e^{-\frac{1}{2}}=\frac{-4}{\sqrt{e}}$$

6/ إنشاء (C_g) و (Δ) (آخر الموضوع)

7/ تعيين a و b حتى تكون H دالة أصلية لـ h

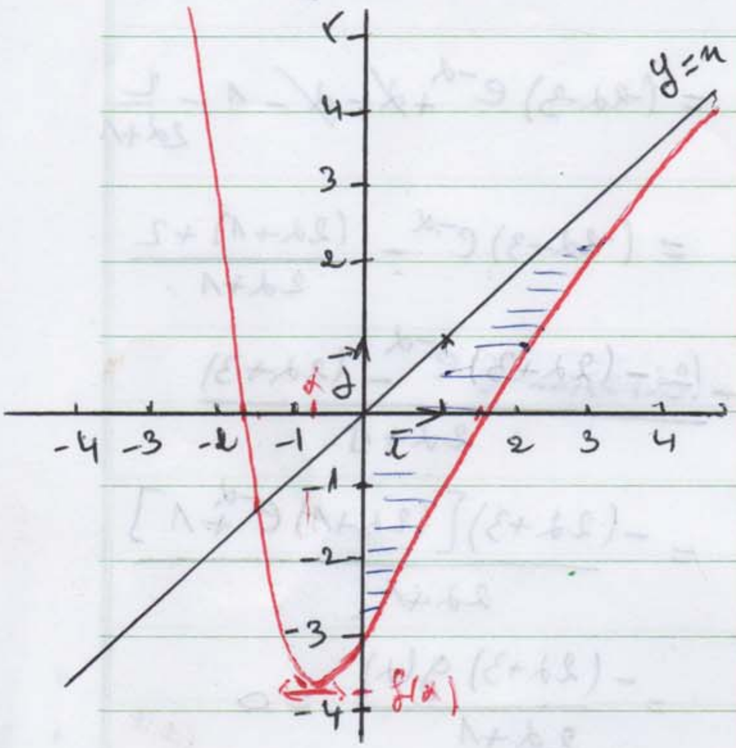
$$H(x)=(ax+b)e^{-x}$$

$$h(x)=(-2x-3)e^{-x}$$

$$H'(x)=h(x)$$

$$H'(x)=a\,e^{-x}-(ax+b)e^{-x}$$

$$=(-ax-b+a)e^{-x}$$



بالمطابقة مع الدالة h نجد

$-a=-2 \Rightarrow a=2$

$-b+a=-3 \quad b=3+a=5$

$$H(x)=(2x+5)e^{-x}$$

7/ ب/ حساب المساحة $A(\lambda)$

المحدد بـ: (C_f) والمستقيمات

$y=x$, $x=\lambda$, $x=0$

$$A(\lambda)=\int_0^\lambda y-f(x)\,dx$$

$$=\int_0^\lambda \cancel{x}-(-2x-3)e^{-x}-\cancel{x}\,dx$$

$$=\left[-H(x)\right]_0^\lambda$$

$$=\left[-H(\lambda)+H(0)\right]$$

$$=-(2\lambda+5)e^{-\lambda}+5 \text{ u.a}$$

حساب $\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty} -(2\lambda+5)e^{-\lambda}+5$$

$$=\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{-2\lambda}{e^\lambda}-\frac{5}{e^\lambda}+5$$

$$=5$$

تـ 03 السؤال ②

أ/ $P(X^2-2X\leq 0)$

$X^2-2X=0$

$X(X-2)=0$

$X-2=0 \quad | \quad X=0$

$X=2$

X		0		2	
X^2-2X	+	0	−	0	+

قيم X هي $0\leq X\leq 2$

$P(X^2-2X\leq 0)=P(0\leq X\leq 2)$

$=P(X=0)+P(X=1)$

$+P(X=1)$

$=\frac{230}{285}$