على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول : 05 نقاط

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n+5}{14-4u_n}$

1) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{12}{14-4u_n}$

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{5}{2}$

ج – بين أن (u_n) متتالية متناقصة تماما واستنتج أنها متقاربة.

2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n = \frac{au_n-1}{2u_n-5}$

- عين قيمة العدد الطبيعي a حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

3) نضع في كل مايلي $a = 2$

أ - عبر بدلالة n عن v_n و u_n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

ب - أحسب المجموع S حيث : $S = v_0 + v_1 + \cdots \ldots\ldots + v_{2021}$

ج – أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{1}{u_0-2{,}5} + \frac{1}{u_1-2{,}5} + \cdots \ldots\ldots + \frac{1}{u_n-2{,}5}$

التمرين الثاني : 04 نقاط

يحتوي صندوق 09 كريات متماثلة لانفرق بينها باللمس ، منها 04 كريات بيضاء مرقمة بـ 0 ; 1 ; 2 ; 3 و 04 كريات حمراء مرقمة بـ : 0 ; 1 ; 2 ; 3 وكرية سوداء تحمل الرقم : -1

1) نسحب على التوالي ودون إرجاع كريتين من الصندوق ونعتبر الحدثين :

A : " الكريات المسحوبة مختلفة اللون " ، B : " الكريات المسحوبة مجموع أرقامها يساوي 2 "

أ – بين أن $P(A) = \frac{2}{3}$ ثم أحسب $P(B)$ احتمال الحادثين A و B على الترتيب .

ب- أحسب احتمال سحب كريتين مختلفتين في اللون ومجموع أرقامها يساوي 2 .

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل أرقام فردية المتبقية في الكيس .

- عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

3) نضيف n كرية سوداء تحمل الرقم -1 ونسحب عشوائيا على التوالي و دون إرجاع كريتين من هذا الصندوق.

نعتبر الحدث C : " الكريتين المسحوبتين سوداوين "

- بين أن $P(C) = \frac{n^2+n}{n^2+17n+72}$ ثم عين عدد الكرات السوداء المضافة إلى الصندوق بحيث يكون $P(C) = \frac{15}{91}$

التمرين الثالث : 4 نقاط

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - 3 + (x+1)^2\, e^{-x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) تحقق أن الدالة $G:\ x \to (-x-1)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة $g:\ x \to xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$

2) نضع $I = \int_0^1 xe^{-x}dx$ و $J = \int_0^1 x^2e^{-x}dx$

أ – باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $J = 2I - e^{-1}$

ب – أحسب قيمة I ثم استنتج قيمة J .

3) أ - بالإستعانة بنتائج السؤال $\left(2-\text{ب}\right)$ أحسب العدد الحقيقي A حيث : $A = \int_0^1 (x+1)^2\, e^{-x}dx$

ب – فسر النتيجة المحصل عليها هندسيا .

التمرين الرابع : 7 نقاط

I/ g الدالة العددية المعرفة على $]1\,;+\infty[$ كمايلي : $g(x) = \frac{1}{x-1} - ln(x-1)$

(C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) أ - أحسب $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} g(x)$ وفسر النتيجة هندسيا .

ب - أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) أ - بين أنه من أجل كل حقيقي x من $]1\,;+\infty[$ فإن : $g'(x) = \frac{-x}{(x-1)^2}$

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أ - بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1\,;+\infty[$ ثم تحقق أن : $2.7 < \alpha < 2.8$

ب - استنتج إشارة $g(x)$ على $]1\,;+\infty[$

II/ نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $]1\,;+\infty[$ كمايلي : $f(x) = 4e^{-x}ln(x-1)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) أ- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ، فسر النتيجة هندسيا .

ب - أحسب $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x)$ ، فسر النتيجة المحصل عليها .

2) أ – برر قابلية إشتقاق الدالة f على $]1\,;+\infty[$ ثم بين أنه من أجل كل x من $]1\,;+\infty[$: $f'(x) = 4e^{-x}g(x)$

ب – استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

3) أنشئ المنحنيين (C_g) و (C_f) (الوحدة $2cm$) (نضع $\alpha = 2{,}75$ و $f(\alpha) = 0{,}14$)

4) تحقق أن : $ln(\alpha - 1) = \frac{1}{\alpha - 1}$

5) - نضع : $U = \int_2^\alpha \frac{1}{x-1}dx$ و $V = \int_2^\alpha ln(x-1)dx$

أ - أحسب العدد الحقيقي U و باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $V = 3 - \alpha$

ب – لتكن A مساحة الحيز بـ cm^2 المحدد بالمنحنى (C_g) و محور الفواصل و المستقيمين ذو المعادلتين $x = 2$ و $x = \alpha$

ج– بين أن $U - V = \frac{(\alpha-2)^2}{\alpha-1}$ واستنتج المساحة A .

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول : 4 نقاط

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{2\sqrt{2}-u_n}$

1) أحسب u_1 ، u_2 .

2) أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < \sqrt{2}$

ب - أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) وبين أنها متقاربة .

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n = \frac{u_n}{\sqrt{2}-u_n}$

أ - بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب - أكتب عبارة v_n بدلالة n .

ج - استنتج أن $u_n = \frac{\sqrt{2}n}{n+1}$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

د - نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n = ln(u_1) + ln(u_2) + \ldots\ldots\ldots + ln(u_n)$

- بين أن : $S_n = \frac{1}{2}\, nln2 - ln(n+1)$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$

التمرين الثاني : 5 نقاط

يحتوي صندوق U_1 على 9 كريات متماثلة لانفرق بينها باللمس منها كرتين بيضاويتين مرقمة: 2 ، 3 و ثلاث كريات حمراء مرقمة : 1 ، 3 ، 3 و أربع كريات سوداء مرقمة 2 ، 2 ، 3 ، 3 . نسحب عشوائيا وفي أن واحد كرتين من الصندوق U_1

نعتبر الحدثين A : " الكرتين المسحوبتين من نفس الرقم " و B : " الكرتين المسحوبتين من نفس اللون "

1) أ - أحسب $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحدثين A و B على الترتيب.

ب - بين أن : $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$ ثم استنتج $P_A(B)$ و $P(A \cup B)$.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة جداء رقمي الكرتين المسحوبتين.

- عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$

3) نعتبر الصندوق الأول U_1 وصندوق آخر U_2 يحتوي على 6 كريات متماثلة لانفرق بينها باللمس منها كرتين بيضاويتين مرقمة بــ : 1 ، 1 و كرتين حمراوين مرقمة بــ : 1 ، 3 و كرتين سوداوين مرقمة بــ: 2 ، 2

نرمي حجر نرد متوازنة مرقمة من 1 إلى 6 مرة واحدة فعند ظهور رقم فردي نسحب كرة من الصندوق الأول U_1 وعند ظهور رقم زوجي نسحب كرة من الصندوق U_2 .

أ) شكل شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية.

ب) بين أن احتمال ظهور كرية بيضاء هو $P(B') = \frac{5}{18}$.

ج) علما أن الكرة المسحوبة بيضاء ، ما احتمال أن تكون من الصندوق الثاني U_2 ؟

التمرين الثالث : 4 نقاط

1) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}$

2) λ عدد حقيقي أكبر تماما من 1 ، أحسب العدد الحقيقي A حيث : $A=\int_1^{\lambda}\frac{1}{x(x+1)^2}dx$

3) نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ : $F(\lambda)=\int_1^{\lambda}\frac{lnx}{(x+1)^3}\,dx$

أ - باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب بدلالة λ العدد الحقيقي $F(\lambda)$.

ب - بين أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{(x+1)^2}=0$ ، ، ثم استنتج $\lim_{\lambda\to+\infty}F(\lambda)$

التمرين الرابع : 7 نقاط

I / الدالةg العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1+\ (1-x)\,e^{-x+2}$

1) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x)\geq 0$

II/ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=\ x-1+xe^{-x+2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ – أحسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

ب – بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\ g(x)$

ج – أدرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ – أحسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

ب – أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم $(\varDelta)$ ذو المعادلة $y=x-1$.

ج – بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي $(\varDelta)$ يطلب كتابة معادلة ديكارتية له .

3) أ - بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها a حيث $0{,}1<a<0{,}2$.

ب – أحسب $f(1)$ ، ثم أنشىء كلا من (T) ، $(\varDelta)$ والمنحنى (C_f) .

4) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $xe^{-x+2}-1-m=0$

5) أ) بين أن الدالة $K: x\to(-x-1)\,e^{-x+2}$ هي دالة أصلية للدالة $k: x\to x\,e^{-x+2}$ على $\mathbb{R}$.

ب) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم $(\varDelta)$ و المستقيمين اللذين معادلتاهما :

$x=2$ و $x=3$

انتهى الموضوع الثاني