

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:  
الموضوع الأول:

التمرين الأول: (04 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير:

(1) النهاية التالية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - e^{\frac{1}{x}})$  تساوي:

(أ)  $+\infty$  (ب) 0 (ج) -1

(2) المتتالية المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ:  $u_n = 1 + \ln\left(\frac{2}{3}\right)^n$  هي:

(أ) متتالية حسابية متناقصة (ب) متتالية هندسية متزايدة (ج) متتالية حسابية متزايدة.

(3) الجدول التالي يعرف قانون احتمال تجربة عشوائية:

$x_i$	-2	-1	$\alpha$	3
$P_i$	0,12	0,5	$\beta$	0,3

الأمل الرياضي لقانون الاحتمال هو  $\mu = 0,32$  من أجل:

(أ)  $\alpha = 1$  و  $\beta = 0,08$  (ب)  $\alpha = 2$  و  $\beta = 0,08$  (ج)  $\alpha = 2$  و  $\beta = 0,03$

(4) إذا كان  $z$  عددا مركبا حيث  $z = \frac{\sqrt{2}+2i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$  فإن:

(أ)  $z^{2022} = 1$  (ب)  $z^{2022} = -1$  (ج)  $z^{2022} = i$

التمرين الثاني: (4,5 نقاط)

صندوق يحوي 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، منها كرتان تحملان الرقم 1 وثلاث كريات تحمل الرقم 0، وخمسة تحمل الرقم 2.

- (1) نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من الصندوق ونعتبر الحدثين  $A$  و  $B$  حيث:
- $A$  "الكريات المسحوبة تحمل أرقاما مختلفة"،  $B$  "الكريات المسحوبة تحمل أرقاما جداولها معدوم"
- (أ) احسب:  $P(A)$  و  $P(B)$  احتمال الحدثين  $A$  و  $B$  على الترتيب.
- (ب) بين أن:  $P(A \cap B) = \frac{7}{10}$ ، هل الحدثان  $A$  و  $B$  مستقلان؟ علل.
- (ج) علما أن جداء ارقام الكرات معدوم ما هو احتمال ان تكون مختلفة.

- (2) ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الأرقام المتساوية المحصل عليها.
- (أ) عين قيم المتغير العشوائي  $X$ .

(ب) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$ ، ثم احسب تباينه  $V(X)$ .

التمرين الثالث: (4,5 نقاط)

لتكن  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة كما يلي:  $u_0 = 1$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $3u_{n+1} = 2u_n - 4$ .  
 $(v_n)$  المتتالية العددية المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $v_n = u_n + \alpha$  حيث  $\alpha$  عدد حقيقي.

(1) اوجد قيمة  $\alpha$  التي من أجلها تكون المتتالية  $(v_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $u_n = 5 \left(\frac{2}{3}\right)^n - 4$

(3) ادرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  على  $\mathbb{N}$ ، و احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) احسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث:  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

(5) لتكن  $(w_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:  $w_n = \frac{5}{v_n + 5} - 5$

(أ) بين أن المتتالية  $(w_n)$  متزايدة تماما على  $\mathbb{N}$ .

(ب) بين أن المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(w_n)$  متجاورتان.

(ج) احسب بدلالة  $n$  المجموع  $S'_n$  حيث:  $S'_n = \frac{1}{w_0 + 5} + \frac{1}{w_1 + 5} + \dots + \frac{1}{w_n + 5}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  ب:  $f(x) = 1 - x^2 e^x$ ،  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس  $(o; \vec{i}, \vec{j})$

(1) (أ) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ؛ ثم احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ماذا تستنتج؟

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها.

(ج) بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $0,7 < \alpha < 0,8$ .

(2) بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين إحداثيهما.

(3) اكتب معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة  $-1$

(4) نعرف على  $\mathbb{R}$  الدالة  $h$  كما يلي:  $h(x) = e^{-1} + x e^x$

(أ) ادرس اتجاه تغير الدالة  $h$  ثم استنتج انها موجبة على  $\mathbb{R}$ .

(ب) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ؛  $f(x) - (1 + e^{-1}x) = -xh(x)$

(ج) استنتج وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة للمماس  $(T)$ .

(5) أنشئ المماس  $(T)$  و المنحنى  $(C_f)$ .

(6) أنشئ في نفس المعلم السابق المنحنى  $(C_g)$  الممثل للدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  ب:  $g(x) = 1 - x^2 e^{-x}$

(7) الدالة  $K$  معرفة على  $\mathbb{R}$  ب:  $K(x) = (ax^2 + bx + c) e^x$  حيث:  $a$ ،  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية.

(أ) عين الأعداد الحقيقية  $a$ ،  $b$  و  $c$  حتى تكون الدالة  $K$  أصلية للدالة:  $x \mapsto x^2 e^x$  على  $\mathbb{R}$ .

(ب) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  والمستقيمات التي معادلتها:

$$x = -2 \text{ ؛ } y = 1 \text{ ؛ } x = 0$$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

فيما يلي أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل:

(1) المعادلة  $\log^3(x) - 2\log^2(x) - 3\log(x) = 0$  تقبل ثلاث حلول في  $\mathbb{R}$ .

(2)  $f$  دالة فردية مستمرة على المجال  $[-a; a]$ : التكامل  $\int_{-a}^a f(x)dx$  يساوي 0.

(3)  $A$  و  $B$  حدثان مستقلان معرفان على نفس المجموعة  $\Omega$  حيث:  $P(A) = 0,2$  و  $P(A \cup B) = 0,7$ ، احتمال الحدث  $B$  يساوي: 0,5

(4) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  حيث:  $|1 - i\sqrt{3}z| = 4$  هي الدائرة التي مركزها  $O$  ونصف قطرها  $r = 1$ .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على أربع قريصات بيضاء تحمل كل واحدة الرقم 3 و أربع قريصات سوداء تحمل كل واحدة الرقم 2. القريصات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس.

(1) نسحب عشوائيا من الكيس ثلاثة قريصات على التوالي دون إرجاع القريصة المسحوبة.  
أ) احسب احتمال الأحداث التالية:

$A$ : " القريصات المسحوبة بيضاء " ؛  $B$ : " القريصات المسحوبة تحمل نفس الرقم ".  
 $C$ : " ضمن القريصات المسحوبة واحدة على الأكثر سوداء ".  
ب) هل الحدثان  $B$  و  $C$  مستقلان؟ علل

(2) نعتبر في هذا الجزء أن عدد القريصات السوداء هو  $n$  (حيث:  $n \geq 2$ )؛ و نسحب من الكيس عشوائيا وفي آن واحد قريصتين.

و ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب مجموع الرقمين الظاهرين على القريصتين.  
أ) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$ ؛ ثم احسب بدلالة  $n$  الأمل الرياضي له.  
ب) استنتج عدد القريصات السوداء التي يجب وضعها في الصندوق حتى يكون  $E(X) = 5$ .

التمرين الثالث (05 نقاط):

$$I \text{ المتتالية العددية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ كما يلي: } \begin{cases} U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - 1 \\ U_0 = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

(1) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n: U_n \leq -\frac{3}{2}$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية  $(U_n)$ ، ثم استنتج أنها متقاربة.  
ج) احسب نهاية المتتالية  $(U_n)$ .



$$(2) \text{ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي } n: U_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{2}$$

$$\text{II } (V_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة بـ } V_0 = 0 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n: V_{n+1} = V_n + U_n + \frac{3}{2}$$

(1) بين أن المتتالية  $(V_n)$  متناقصة تماما على  $\mathbb{N}$

$$(2) \text{ (ا) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n: V_n = -\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$$

(ب) استنتج عبارة  $V_n$  بدلالة  $n$ .

(ج) احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ ، ثم استنتج أن المتتاليتين  $(U_n)$  و  $(V_n)$  متجاورتان.

(3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :

$$\ln\left(\frac{2}{3}V_0 + 1\right) + \ln\left(\frac{2}{3}V_1 + 1\right) + \dots + \ln\left(\frac{2}{3}V_n + 1\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

التمرين الرابع (07 نقاط)

I نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $\begin{cases} f(x) = (x-1)^2 \ln|x-1| - 2 & ; x \neq 1 \\ f(1) = -2 \end{cases}$   
 $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس  $(o; \vec{i}, \vec{j})$

(1) احسب:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(2) (ا) ادرس قابلية اشتقاق الدالة  $f$  عند  $x_0 = 1$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

(ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن 1:  $f'(x) = (x-1)(1 + 2\ln|x-1|)$

(ج) ادرس إتجاه تغير الدالة  $f$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) (ا) بين أن المستقيم ذو المعادلة  $x = 1$  محور تناظر للمنحنى  $(C_f)$ .

(ب) بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما  $\alpha$  و  $\beta$  حيث:  $2,82 < \alpha < 2,83$ ، يطلب تعيين حصرا للعدد  $\beta$ .

(4) اكتب معادلة للمستقيم  $(T)$  مماس المنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة -1.

(5) أنشئ المماس  $(T)$  و المنحنى  $(C_f)$  على المجال  $[-2; 4]$ .

II (1) باستعمال التكامل بالتجزئة، أوجد الدالة الأصلية للدالة  $x \mapsto (x-1)^2 \ln(x-1)$  على المجال  $]1; +\infty[$  والتي تنعدم عند 2.

(2)  $A(\alpha)$  مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  والمستقيمت التي معادلتها:

$$x = \alpha \text{ و } x = 2, y = -2$$

$$- \text{ بين أن: } A(\alpha) = \frac{1}{9}(-\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha - 4) \text{ u.a}$$

مدیرية التربية لولاية غرداية		تصحیح نموذجي لاختبار البكالوريا التجريبي	دورة: ماي 2022																			
الشعبة: علوم تجريبية		مادة الرياضيات	المدة: 3 ساعات ونصف																			
الموضوع الأول		العلامة																				
التمرين الأول:																						
04	(1) الاقتراح الصحيح هو: ج																					
0,25	لأن: بوضع $X = \frac{1}{x}$ نجد: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - e^{\frac{1}{x}}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{X}(1 - e^X) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^X}{X} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{e^X - 1}{X} = -1$																					
0,75																						
0,25	(2) الاقتراح الصحيح هو: أ																					
0,75	لأن: $u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - \ln\left(\frac{2}{3}\right)^n = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$ ومنه المتتالية حسابية وبما أن $\ln\left(\frac{2}{3}\right) < 0$ فإنها متناقصة تماما.																					
0,25	(3) الاقتراح الصحيح هو: ب																					
0,75	لأن: $\beta = 1 - (0,12 + 0,5 + 0,3) = 0,08$ ؛ $\alpha = 2 - 0,08\alpha = 0,32 - (-0,24 - 0,5 + 0,9) = 0,16$ منه: $\alpha = 2$																					
0,25	(4) الاقتراح الصحيح هو: ب																					
0,75	لأن: $z = \frac{\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - i\sqrt{2}} = \frac{1 + 2i}{2 - i} = \frac{(1 + 2i)(2 + i)}{5} = \frac{5i}{5} = i$ منه: $z^{2022} = (i)^{2022} = (i^2)^{1011} = (-1)^{1011} = -1$																					
4,25	التمرين الثاني:																					
(1) أ) حساب احتمال الحادثتين $A$ و $B$ :																						
2 * 0,5	الحادثة $\bar{A}$ "الكريات تحمل نفس الرقم" ؛ الحادثة $\bar{B}$ "لا توجد كرية تحمل الرقم 0". $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_3^3 + C_5^3}{C_{10}^3} = 1 - \frac{1 + 10}{120} = \frac{109}{120}$ ؛ $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{C_7^3}{C_{10}^3} = 1 - \frac{35}{120} = \frac{85}{120} = \frac{17}{24}$																					
0,5	ب) تبين أن $P(A \cap B) = \frac{7}{10}$ : $P(A \cap B) = \frac{C_3^1 \times C_7^2 + C_3^2 \times C_7^1}{C_{10}^3} = \frac{63 + 21}{120} = \frac{84}{120} = \frac{7}{10}$																					
0,5	بما أن: $P(A) \times P(B) = \frac{1853}{2880}$ و $P(A \cap B) = \frac{2016}{2880}$ منه: $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ فإن الحادثتين $A$ و $B$ غير مستقلتين.																					
0,5	ج) حساب احتمال أن تكون أرقام الكريات مختلفة علما أن جدها معدوم: $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{7}{10} \times \frac{24}{17} = \frac{84}{85}$																					
0,25	(2) تعيين القيم الممكنة لـ $X$ : كريات إما تحمل نفس الرقم فإن $X = 3$ و تحمل أرقاما مختلفة مثنى مثنى فإن $X = 0$ . أو كرتان تحملان نفس الرقم و الأخرى تحمل رقما مختلفا فإن $X = 2$ ، إذن: مجموعة القيم الممكنة لـ $X$ هي $\{0; 2; 3\}$ .																					
0,75	ب) تعريف قانون الاحتمال:																					
	<table border="1"> <thead> <tr> <th><math>x_i =</math></th> <th>0</th> <th>2</th> <th>3</th> <th><math>\Sigma</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>P(X = x_i) =</math></td> <td><math>\frac{30}{120}</math></td> <td><math>\frac{79}{120}</math></td> <td><math>\frac{11}{120}</math></td> <td>1</td> </tr> <tr> <td><math>x_i \cdot P_i =</math></td> <td>0</td> <td><math>\frac{158}{120}</math></td> <td><math>\frac{33}{120}</math></td> <td><math>\frac{191}{120}</math></td> </tr> <tr> <td><math>x_i^2 \cdot P_i =</math></td> <td>0</td> <td><math>\frac{316}{120}</math></td> <td><math>\frac{99}{120}</math></td> <td><math>\frac{415}{120}</math></td> </tr> </tbody> </table>	$x_i =$	0	2	3	$\Sigma$	$P(X = x_i) =$	$\frac{30}{120}$	$\frac{79}{120}$	$\frac{11}{120}$	1	$x_i \cdot P_i =$	0	$\frac{158}{120}$	$\frac{33}{120}$	$\frac{191}{120}$	$x_i^2 \cdot P_i =$	0	$\frac{316}{120}$	$\frac{99}{120}$	$\frac{415}{120}$	$P(X = 3) = P(\bar{A}) = \frac{11}{120}$ $P(X = 2) = \frac{C_3^2 \times C_7^1 + C_3^1 \times C_7^2 + C_5^2 \times C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{79}{120}$ $P(X = 0) = \frac{C_3^1 \times C_2^1 \times C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{30}{120}$
$x_i =$	0	2	3	$\Sigma$																		
$P(X = x_i) =$	$\frac{30}{120}$	$\frac{79}{120}$	$\frac{11}{120}$	1																		
$x_i \cdot P_i =$	0	$\frac{158}{120}$	$\frac{33}{120}$	$\frac{191}{120}$																		
$x_i^2 \cdot P_i =$	0	$\frac{316}{120}$	$\frac{99}{120}$	$\frac{415}{120}$																		
0,75	* حساب التباين $Var(X)$ : $Var(X) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 \cdot p_i - [E(X)]^2 = \frac{13319}{14400} \approx 0,925$ منه: $E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i \cdot p_i = \frac{191}{120} \approx 1,59$																					
04,5	التمرين الثالث:																					
0,5	(1) حساب قيمة $\alpha$ :																					
0,25	تكون المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ إذا و فقط إذا كان: $\frac{\alpha - 4}{3} = 0$ أي: $\alpha = 4$ . حدها الأول $v_0 = u_0 + \alpha = 1 + 4 = 5$																					

	(2) تبين عبارة الحد العام لـ $(u_n)$ :
0,5	$(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ حدها الأول 5 إذن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ : $v_n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ومنه: $u_n = v_n - 4 = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n - 4$ .
0,5	(3) دراسة اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ : $u_{n+1} - u_n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 5\left(\frac{2}{3}\right)^n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n \left(-\frac{1}{3}\right) < 0$ إذن المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما.
0,25	حساب نهاية المتتالية $(u_n)$ : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(5\left(\frac{2}{3}\right)^n - 4\right) = -4$ (لأن $-1 < \frac{2}{3} < 1$ منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ )
	(4) حساب المجموع $S_n$ : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n - (4 + 4 + \dots + 4)$
0,5	$S_n = 5 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} - 4(n+1) = 15 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] - 4(n+1) = 11 - 4n - 15\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$
0,75	(5) لنبين أن $(w_n)$ متزايدة تماما: $w_{n+1} - w_n = \frac{5}{v_{n+1} + 5} - \frac{5}{v_n + 5} = \frac{5v_n + 25 - 5v_{n+1} - 25}{(v_{n+1} + 5)(v_n + 5)} = \frac{5\left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{1}{3}\right)}{(v_{n+1} + 5)(v_n + 5)}$ بما أن: $v_n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n > 0$ و $5\left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{1}{3}\right) > 0$ فإن: $0 < w_{n+1} - w_n$ ومنه المتتالية $(w_n)$ متزايدة تماما.
0,5	(ب) لنبين أن $(u_n)$ و $(w_n)$ متجاورتان: لدينا: المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما و المتتالية $(w_n)$ متزايدة تماما كما أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n - u_n) = (-4 + 4) = 0$ منه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{v_n + 5} - 5\right) = 1 - 5 = -4$ (لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ ) و بالتالي فإن المتتاليتين $(u_n)$ و $(w_n)$ متجاورتان.
0,75	(ج) حساب المجموع $T_n$ : $T_n = \frac{1}{w_0 + 5} + \frac{1}{w_1 + 5} + \dots + \frac{1}{w_n + 5} = \frac{v_0 + 5}{5} + \frac{v_1 + 5}{5} + \dots + \frac{v_n + 5}{5}$ $T_n = \frac{1}{5}(v_0 + v_1 + \dots + v_n) + 1 + 1 + \dots + 1 = 3 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] + (n+1) = 4 + n - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$
07,25	التمرين الرابع:
3*0,25	(1) حساب النهايتين: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ; $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ ; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ ; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$ لـ $(C_r)$ مستقيم مقارب معادلته $y=1$ عند $-\infty$ .
4*0,25	(ب) دراسة اتجاه تغير الدالة $f$ و إنشاء جدول التغيرات: $f$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث: $f'(x) = -2xe^x - x^2e^x$ $f'(x) = e^x(-x^2 - 2x)$ إشارة $f'(x)$ مثل إشارة $(-x^2 - 2x)$ لأن $e^x > 0$ . منه: الدالة $f$ متناقصة تماما على $]-\infty; -2]$ و $[0; +\infty[$ ; متزايدة تماما على $]-2; 0]$ .
0,25	(ج) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $0,7 < \alpha < 0,8$ :
0,25	(*) من أجل $x \in ]-\infty; 0]$ فإن: $f(x) \geq 1 - 4e^{-2} > 0$ إذن المعادلة $f(x) = 0$ لا تقبل حلا على $]-\infty; 0]$ .
0,25	(*) $f$ مستمرة و متناقصة تماما على $[0; +\infty[$ وبما أن: $f(0,7) \approx 0,01 > 0$ و $f(0,8) \approx -0,42 < 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على $[0; +\infty[$ حلا وحيدا $\alpha$ حيث $0,7 < \alpha < 0,8$ .



(2) تبين أن المنحني  $(C_f)$  يقبل تقطبي انعطاف :

0,25

$$f''(x) = e^x(-x^2 - 2x) + (-2x - 2)e^x = e^x(-x^2 - 4x - 2) \quad \text{حيث: } f' \text{ تقبل الاشتقاق على } \mathbb{R}$$

0,25

$x$	$-\infty$	$-2 - \sqrt{2}$	$-2 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	○	+	○

إشارة  $f''(x)$  مثل إشارة  $(-x^2 - 4x - 2)$  لأن  $e^x > 0$

0,25

$f''(x)$  انعدمت مرتين مغيرة إشارتها إذن لـ  $(C_f)$  تقطنا انعطاف، إحداثيها:  $(-0,6; 0,8)$  و  $(-3,4; 0,6)$  (النتائج مدورة)

(3) كتابة معادلة للمماس  $(T)$  للمنحني  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة  $-1$ :

0,5

$$(T): y = e^{-1}x + 1 \quad \text{منه:} \quad (T): y = e^{-1}(x+1) + 1 - e^{-1} \quad \text{أي:} \quad (T): y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$$

(4) ادرس اتجاه تغير الدالة  $h$ :

3\*0,25

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$h'(x)$	-	○	+

$$h'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x) \quad \text{حيث: } \mathbb{R} \text{ تقبل الاشتقاق على}$$

إشارة  $h'(x)$  مثل إشارة  $(1+x)$  لأن  $e^x > 0$ .

و بالتالي  $h$  متناقصة تماما على  $]-\infty; -1]$  و متزايدة تماما على  $]-1; +\infty[$ .

0,25

$h(-1) = e^{-1} - e^{-1} = 0$ ؛ وبالتالي  $h(x) \geq 0$  على  $\mathbb{R}$ .

0,25

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$+\infty$
$-x$	+	○	+	-
$h(x)$	+	○	+	+
$xh(x)$	+	○	+	-
الوضع النسبي	$(C_f)$ فوق $(T)$	تماس $(C_f)$ و $(T)$	تقاطع $(C_f)$ و $(T)$	$(C_f)$ أسفل $(T)$

(ب) التحقق من المساواة: من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ,

$$f(x) - (1 + e^{-1}x) = 1 - x^2e^x - 1 - e^{-1}x$$

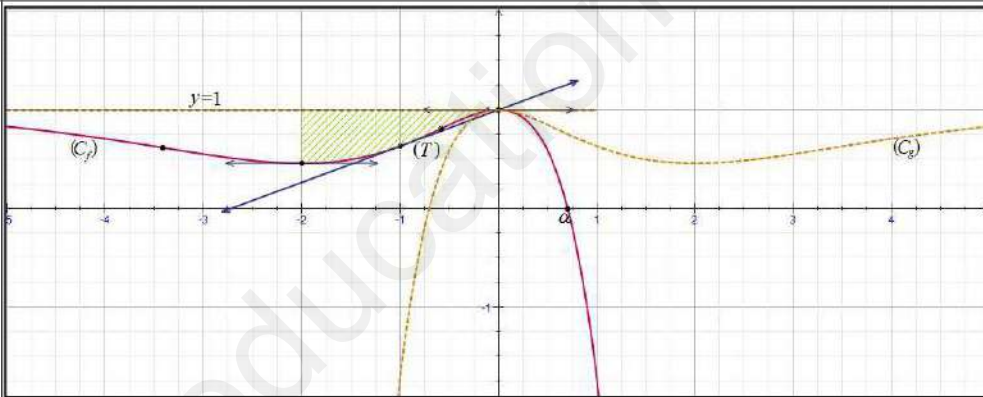
$$= -x(xe^x + e^{-1}) = -xh(x)$$

(ج) استنتاج وضعية  $(C_f)$  بالنسبة لـ  $(T)$ :

الوضع النسبي من إشارة  $f(x) - (1 + e^{-1}x) = -xh(x)$ .

0,75

0,25



(5) إنشاء  $(C_f)$  و المماس  $(T)$ :

(6) إنشاء المنحني  $(C_g)$ :

لدينا:  $g(x) = 1 - x^2e^{-x}$

يعني:  $g(x) = 1 - (-x)^2e^{-x}$

أي:  $g(x) = f(-x)$

منه  $(C_g)$  نظير  $(C_f)$

بالنسبة لمحور الترتيب.

(7) تعيين الأعداد الحقيقية  $a$ ,  $b$ , و  $c$ :

0,5

$$K'(x) = (2ax + b)e^x + e^x(ax^2 + bx + c) = e^x(ax^2 + (2a + b)x + b + c) \quad \text{حيث: } \mathbb{R} \text{ تقبل الاشتقاق على}$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases} \quad \text{يعني:} \quad \begin{cases} a=1 \\ 2a+b=0 \\ b+c=0 \end{cases}$$

إذن الدالة  $K$  حيث  $K(x) = e^x(x^2 - 2x + 2)$  هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto x^2e^x$  على  $\mathbb{R}$ .

2\*0,25

$$(ب) \text{ حساب المساحة: } S = \int_{-2}^0 |f(x) - 1| dx = \int_{-2}^0 x^2e^x dx = [e^x(x^2 - 2x + 2)]_{-2}^0 = 2 - 10e^{-2} \text{ (u.a)}$$

انتهى حل الموضوع الأول

مدیرية التربية لولاية غرداية		تصحیح نموذجي لاختبار البكالوريا التجريبي	دورة: ماي 2022										
الشعبة: علوم تجريبية		مادة الرياضيات	المدة: 3 ساعات ونصف										
الموضوع الثاني		العلامة											
التمرين الأول:		04											
0,25	(1) المعادلة: $\log^3(x) - 2\log^2(x) - 3\log(x) = 0$ تقبل ثلاثة حلول: <-----> صحیح												
0,75	التبرير: $\log^3(x) - 2\log^2(x) - 3\log(x) = 0$ تكافئ: $\log^3(x) - 2\log^2(x) - 3\log(x) = 0$ تكافئ: $\log(x) = X$ $\log(x) = 0$ أو $\log(x) = -1$ أو $\log(x) = 3$ تكافئ: $x = 1$ أو $x = 10^{-1}$ أو $x = 10^3$ .												
0,25	(2) التكامل: إذا كانت الدالة $f$ مستمرة و فردية على $[-a; a]$ فإن: $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ <-----> صحیح												
0,75	التبرير: $f$ مستمرة على $[-a; a]$ إذن تقبل عليه دالة أصلية $F$ وكذلك: $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \dots (1)$ و بما أن $f$ فردية فإن: $f(x) = -f(-x)$ بالتعويض في (1) نجد: $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 -f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx$ إذن: $\int_{-a}^a f(x)dx = [F(-x)]_{-a}^0 + [F(x)]_0^a = F(0) - F(a) + F(a) - F(0) = 0$												
0,25	(3) احتمال الحادثة $B$ يساوي 0,5 <-----> خطأ												
0,75	التبرير: نعم أن $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ وبما أن $A$ و $B$ مستقلتان فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$ أي أن: $P(B) = \frac{0,5}{0,8} = 0,625$ منه: $0,7 = 0,2 + P(B)(1 - 0,2)$ .												
0,25	(4) مجموعة النقط $M(z)$ حيث $ z - (1 - i\sqrt{3})  = 4$ هي الدائرة التي مركزها $O$ و نصف قطرها $r = 1$ <-----> خطأ												
0,75	التبرير: $ z - (1 - i\sqrt{3})  = 4$ تكافئ: $ z - (1 - i\sqrt{3})  = 4$ تكافئ: $ z  = 2$ تكافئ: $OM = 2$ وبالتالي: مجموعة النقط $M(z)$ هي الدائرة التي مركزها $O$ و نصف قطرها $r = 2$ .												
التمرين الثاني:		04											
(1) حساب احتمال الحوادث $A$ ، $B$ و $C$ :													
3 * 0,5	(أ) $P(A) = \frac{A_4^3}{A_8^3} = \frac{24}{336} = \frac{1}{14}$ ؛ $P(B) = \frac{A_4^3 + A_4^3}{A_8^3} = \frac{2 \times 24}{336} = \frac{1}{7}$ ؛ $P(C) = \frac{A_4^3 + 6 \times C_4^1 \times C_4^2}{A_8^3} = \frac{24 + 144}{336} = \frac{1}{2}$												
0,75	(ب) $P(B \cap C) = \frac{A_4^3}{A_8^3} = \frac{24}{336} = \frac{1}{14}$ ، بما أن $P(B) \times P(C) = \frac{1}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{14} = P(B \cap C)$ فإن الحادثتين $B$ و $C$ مستقلتان.												
0,25	(2) تعريف قانون الاحتمال: مجموعة القيم الممكنة لـ $X$ هي: $\{4; 5; 6\}$ .												
0,75	$P(X=5) = \frac{C_n^1 \times C_4^1}{C_{4+n}^2} = \frac{8n}{n^2 + 7n + 12}$ ؛ $P(X=4) = \frac{C_n^2}{C_{n+4}^2} = \frac{n! \cdot 2!(n+2)!}{2!(n-2)! (n+4)!} = \frac{n \times (n-1)}{(n+3)(n+4)} = \frac{n^2 - n}{n^2 + 7n + 12}$ <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td><math>x_i =</math></td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td><math>\Sigma</math></td> </tr> <tr> <td><math>P_i =</math></td> <td><math>\frac{n^2 - n}{n^2 + 7n + 12}</math></td> <td><math>\frac{8n}{n^2 + 7n + 12}</math></td> <td><math>\frac{12}{n^2 + 7n + 12}</math></td> <td>1</td> </tr> </table> $P(X=6) = \frac{C_4^2}{C_{4+n}^2} = \frac{12}{n^2 + 7n + 12}$ (*) حساب الأمل الرياضي:	$x_i =$	4	5	6	$\Sigma$	$P_i =$	$\frac{n^2 - n}{n^2 + 7n + 12}$	$\frac{8n}{n^2 + 7n + 12}$	$\frac{12}{n^2 + 7n + 12}$	1		
$x_i =$	4	5	6	$\Sigma$									
$P_i =$	$\frac{n^2 - n}{n^2 + 7n + 12}$	$\frac{8n}{n^2 + 7n + 12}$	$\frac{12}{n^2 + 7n + 12}$	1									
0,25	$E(X) = \frac{4(n^2 - n) + 5 \times 8n + 6 \times 12}{n^2 + 7n + 12} = \frac{4n^2 + 36n + 72}{n^2 + 7n + 12}$												
0,5	(ب) استنتاج عدد القرصات السوداء حيث $E(X) = 5$ تكافئ: $\frac{4n^2 + 36n + 72}{n^2 + 7n + 12} = 5$ تكافئ: $4n^2 + 36n + 72 = 5n^2 + 35n + 60$ تكافئ: $n^2 - n - 12 = 0$ تكافئ: $n = 4$ أو $n = -3$ (مرفوض).												



05	التمرين الثالث :
0,5	<p>1. البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي <math>n : u_n \leq -\frac{3}{2}</math></p> <p>(*) لدينا: <math>u_0 = -\frac{5}{2}</math> و <math>-\frac{5}{2} \leq -\frac{3}{2}</math> إذن الخاصية محققة من أجل <math>n=0</math>.</p> <p>(*) نرض أنه من أجل عدد طبيعي كفي <math>n : u_n \leq -\frac{3}{2}</math> و لنثبت أن: <math>u_{n+1} \leq -\frac{3}{2}</math></p> <p>لدينا من الفرضية: <math>u_n \leq -\frac{3}{2}</math> ومنه: <math>1 - \frac{1}{3}u_n - 1 \leq \frac{1}{3}(-\frac{3}{2}) - 1</math> أي: <math>u_{n+1} \leq -\frac{3}{2}</math> إذن الخاصية محققة من أجل <math>n+1</math>.</p> <p>(*) الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي <math>n : u_n \leq -\frac{3}{2}</math>.</p> <p>ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية <math>(u_n)</math>:</p> <p><math>u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n - 1 - u_n = \frac{-2u_n - 3}{3}</math> و بما أن: <math>u_n \leq -\frac{3}{2}</math> فإن: <math>\frac{-2u_n - 3}{3} \geq 0</math> إذن: المتتالية <math>(u_n)</math> متزايدة.</p> <p>(*) استنتاج التقارب: <math>(u_n)</math> متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ <math>-\frac{3}{2}</math> (لأن: <math>u_n \leq -\frac{3}{2}</math>) إذن هي متقاربة نحو <math>l \leq -\frac{3}{2}</math>.</p> <p>ج) حساب النهاية:</p> <p><math>\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l</math> (لأن <math>(u_n)</math> متقاربة) و لدينا: <math>u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 1</math> منه: <math>l = \frac{1}{3}l - 1</math> أي: <math>l = -1</math> و بالتالي: <math>l = -\frac{3}{2}</math>.</p>
0,75	<p>2 البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي <math>n : u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{2}</math></p> <p>(*) لدينا: <math>u_0 = -\frac{5}{2}</math> و <math>-\left(\frac{1}{3}\right)^0 - \frac{3}{2} = -1 - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}</math> إذن الخاصية محققة من أجل <math>n=0</math>.</p> <p>(*) نرض أنه من أجل عدد طبيعي كفي <math>n : u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{2}</math> و لنثبت أن: <math>u_{n+1} = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \frac{3}{2}</math></p> <p>لدينا من الفرضية: <math>u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{2}</math> منه: <math>1 - \frac{1}{3}u_n - 1 = -\frac{1}{3}\left(-\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{2}\right) - 1</math> أي: <math>u_{n+1} = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \frac{3}{2}</math>.</p> <p>(*) الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي <math>n : u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{2}</math>.</p>
0,5	<p>1. إثبات أن المتتالية <math>(v_n)</math> متناقصة تماما:</p> <p>من أجل كل عدد طبيعي <math>n</math> لدينا: <math>v_{n+1} = v_n + u_n + \frac{3}{2}</math> يعني: <math>v_{n+1} - v_n = u_n + \frac{3}{2} = -\left(\frac{1}{3}\right)^n &lt; 0</math> منه <math>(v_n)</math> متناقصة تماما.</p>
0,75	<p>2) الإثبات بالتراجع أنه من أجل كل <math>n \in \mathbb{N}^*</math> : <math>v_n = -\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)</math></p> <p>(*) من الخاصية نجد: <math>v_1 = -1</math> و نعلم أن: <math>v_1 = v_0 + u_0 + \frac{3}{2} = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} = -1</math> إذن الخاصية محققة من أجل <math>n=1</math>.</p> <p>(*) نرض من أجل <math>n \in \mathbb{N}^*</math> كفي: <math>v_n = -\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)</math> لنثبت أن: <math>v_{n+1} = -\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)</math></p> <p>لدينا من الفرضية: <math>v_n = -\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)</math> و نعلم أن: <math>v_{n+1} - v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n</math> (من الجواب السابق)</p> <p>منه: <math>v_{n+1} = -\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = -\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^n</math>.</p> <p>(*) الخلاصة: من أجل كل <math>n \in \mathbb{N}^*</math> : <math>v_n = -\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)</math>.</p>

ب) استنتاج عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$ :

$$v_n = -\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) = -\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = -\frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) : n \in \mathbb{N}^*$$

0,5

(مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{3}$ )

$$v_n = -\frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) : n \text{ فإنه من أجل كل عدد طبيعي } n : v_0 = -\frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^0\right) = 0 = v_0$$

0,25

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\frac{3}{2} \text{ (لأن } -1 < \frac{1}{3} < 1 \text{ منه } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0)$$

ج) حساب النهاية: \* استنتاج أن المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان:

0,25

المتتالية  $(u_n)$  متزايدة و المتتالية  $(v_n)$  متناقصة وبما أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$  فإن  $(v_n)$  و  $(u_n)$  متجاورتان.

$$\ln\left(\frac{2}{3}v_0 + 1\right) + \ln\left(\frac{2}{3}v_1 + 1\right) + \dots + \ln\left(\frac{2}{3}v_n + 1\right) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \ln(3) : n \in \mathbb{N}$$

0,5

$$\ln\left(\frac{2}{3}v_n + 1\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)^n = n \ln\left(\frac{1}{3}\right) \text{ ومنه: } \frac{2}{3}v_n + 1 = -\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^n : n \in \mathbb{N}$$

$$\ln\left(\frac{2}{3}v_0 + 1\right) + \ln\left(\frac{2}{3}v_1 + 1\right) + \dots + \ln\left(\frac{2}{3}v_n + 1\right) = 0 \times \ln\left(\frac{1}{3}\right) + 1 \times \ln\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + n \times \ln\left(\frac{1}{3}\right) \text{ إذن:}$$

$$= (0 + 1 + \dots + n) \times \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \ln(3)$$

07

التمرين الرابع:

1. حساب النهايتين:

3\* 0,25

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty ; \left( \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty \text{ و لأن } |x-1| = X \text{ بوضع } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} (X^2 \ln(X) - 2) = +\infty \right)$$

2) دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $f$  عند 1: الدالة  $f$  معرفة عند 1 و بجواره:

0,5

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{X \rightarrow 0^+} -X \ln X = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^2 \ln|x-1|}{x-1} = \lim_{X \rightarrow 0^+} X \ln X = 0$$

إذن: الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق عند 1 حيث:  $f'(1) = 0$ .

0,25

بيانياً: نستنتج أن المنحني  $(C_f)$  يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماساً معامل توجيهه 0 (أي مماساً أفقياً).  
ب) تبيين عبارة المشتقة من أجل كل  $x \neq 1$ :

$$f'(x) = 2(x-1) \ln(-(x-1)) + \frac{-1}{-(x-1)}(x-1)^2 = (x-1)(1 + 2 \ln(-(x-1))) \text{ و: } ]-\infty; 1[$$

0,75

$$f'(x) = 2(x-1) \ln(x-1) + \frac{1}{(x-1)}(x-1)^2 = (x-1)(1 + 2 \ln(x-1)) \text{ و: } ]1; +\infty[$$

ومنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن 1 فإن:  $f'(x) = (x-1)(1 + 2 \ln|x-1|)$

ج) دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  و تشكيل جدول تغيراتها:

$x$	$-\infty$	$1 - e^{-\frac{1}{2}}$	1	$1 + e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$x-1$	-	-	0	+	+
$1 + 2 \ln x-1 $	+	0	-	-	+
$f'(x)$	-	0	+	-	+
$f(x)$	$+\infty$	$-2 - 0,5e^{-1}$	-2	$-2 - 0,5e^{-1}$	$+\infty$

0,5

$$1 + 2 \ln|x-1| > 0 \quad \Bigg| \quad 1 + 2 \ln|x-1| = 0$$

$$|x-1| > e^{-\frac{1}{2}}$$

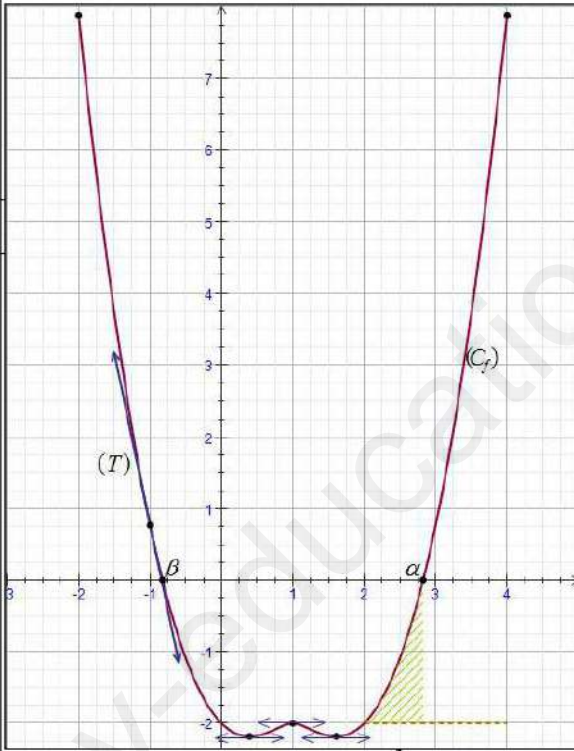
$$|x-1| = e^{-\frac{1}{2}}$$

تكافئ:

0,25

يعني:  $x < 1 - e^{-\frac{1}{2}}$  أو  $x > 1 + e^{-\frac{1}{2}}$  |  $x = 1 - e^{-\frac{1}{2}}$  أو  $x = 1 + e^{-\frac{1}{2}}$

0,25	الدالة $f$ متناقصة تماما على $]-\infty; 1 - e^{-\frac{1}{2}}]$ و $[1; 1 + e^{\frac{1}{2}}[$ ؛ متزايدة تماما على $[1 - e^{-\frac{1}{2}}; 1]$ و $[1 + e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$ .
0,5	(3) تبين أن المستقيم ذا المعادلة $x=1$ محور تناظر لـ $(C_r)$ : $D_r = \mathbb{R}$ (*) فهي متناظرة بالنسبة بالنسبة لـ $1$ ؛ و من أجل كل عدد حقيقي $x$ يختلف عن $1$ فإن : $f(1-x) - f(1+x) = (1-x-1)^2 \ln 1-x-1  - (1+x-1)^2 \ln 1+x-1  = x^2 \ln x  - x^2 \ln x  = 0$ (*) إذن: المنحني $(C_r)$ متناظر بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $x=1$ . (ب) تبين أن $(C_r)$ يقطع محور الفواصل في نقطتين أي أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين:
0,25	(*) الدالة $f$ مستمرة و متزايدة تماما على $[1 + e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$ وبما أن: $f(2,82) \approx -0,02 < 0$ و $f(2,83) \approx 0,02 > 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على $[1 + e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$ حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $2,82 < \alpha < 2,83$ .
0,25	(*) الدالة $f$ مستمرة و متناقصة تماما على $]-\infty; 1 - e^{-\frac{1}{2}}]$ وبما أن: $f(1 - e^{-\frac{1}{2}}) < 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) > 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على $]-\infty; 1 - e^{-\frac{1}{2}}]$ حلا وحيدا $\beta$ .
0,25	(*) من التناظر نستنتج أن $\beta = 2(1) - \alpha$ أي: $2 - 2,83 < \beta < 2 - 2,82$ إذن: $-0,83 < \beta < -0,82$ .
0,5	(4) كتابة معادلة لـ $(T)$ المماس للمنحني $(C_r)$ عند النقطة ذات الفاصلة $-1$ $(T): y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ أي: $(T): y = -(2 + 4 \ln(2))(x+1) + 4 \ln(2) - 2$ منه: $(T): y = -(2 + 4 \ln(2))x - 4$
0,75	(5) إنشاء المنحني $(C_r)$ و المماس $(T)$ على المجال $[-2; 4]$ :
0,25	1.11 حساب الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto (x-1)^2 \ln(x-1)$ على $]1; +\infty[$ و التي تنعدم عند $2$ و لتكن $H$ : الدالة $H$ معرفة على $]1; +\infty[$ بـ: $H(x) = \int_2^x (t-1)^2 \ln(t-1) dt$ نضع: $\begin{cases} u(t) = \ln(t-1) \\ v(t) = \frac{1}{3}(t-1)^3 \end{cases}$ حيث: $\begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t-1} \\ v'(t) = (t-1)^2 \end{cases}$ نجد: $H(x) = \left[ \frac{1}{3}(t-1)^3 \ln(t-1) \right]_2^x - \int_2^x \frac{1}{3}(t-1)^2 dt$
0,25	أي: $H(x) = \frac{1}{3}(x-1)^3 \ln(x-1) - \frac{1}{9}[(t-1)^3]_2^x = \frac{1}{3}(x-1)^3 \ln(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^3 + \frac{1}{9}$
0,25	(2) حساب المساحة $A(\alpha)$ : $A(\alpha) = \int_2^\alpha  f(x) - (-2)  dx = [H(x)]_2^\alpha = \frac{1}{3}(\alpha-1)^3 \ln(\alpha-1) - \frac{1}{9}(\alpha-1)^3 + \frac{1}{9} \dots (1)$ نعلم أن: $f(\alpha) = (\alpha-1)^2 \ln(\alpha-1) - 2 = 0$ يعني: $\ln(\alpha-1) = \frac{2}{(\alpha-1)^2}$ بالتعويض في (1) نجد: $A(\alpha) = \frac{1}{3}(\alpha-1)^3 \times \frac{2}{(\alpha-1)^2} - \frac{1}{9}(\alpha-1)^3 + \frac{1}{9} = \frac{2}{3}(\alpha-1) - \frac{1}{9}(\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1) + \frac{1}{9}$ إذن: $A(\alpha) = \frac{1}{9}(6\alpha - 6 - \alpha^3 + 3\alpha^2 - 3\alpha + 1 + 1) = \frac{1}{9}(-\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha - 4)$



انتهى حل الموضوع الثاني